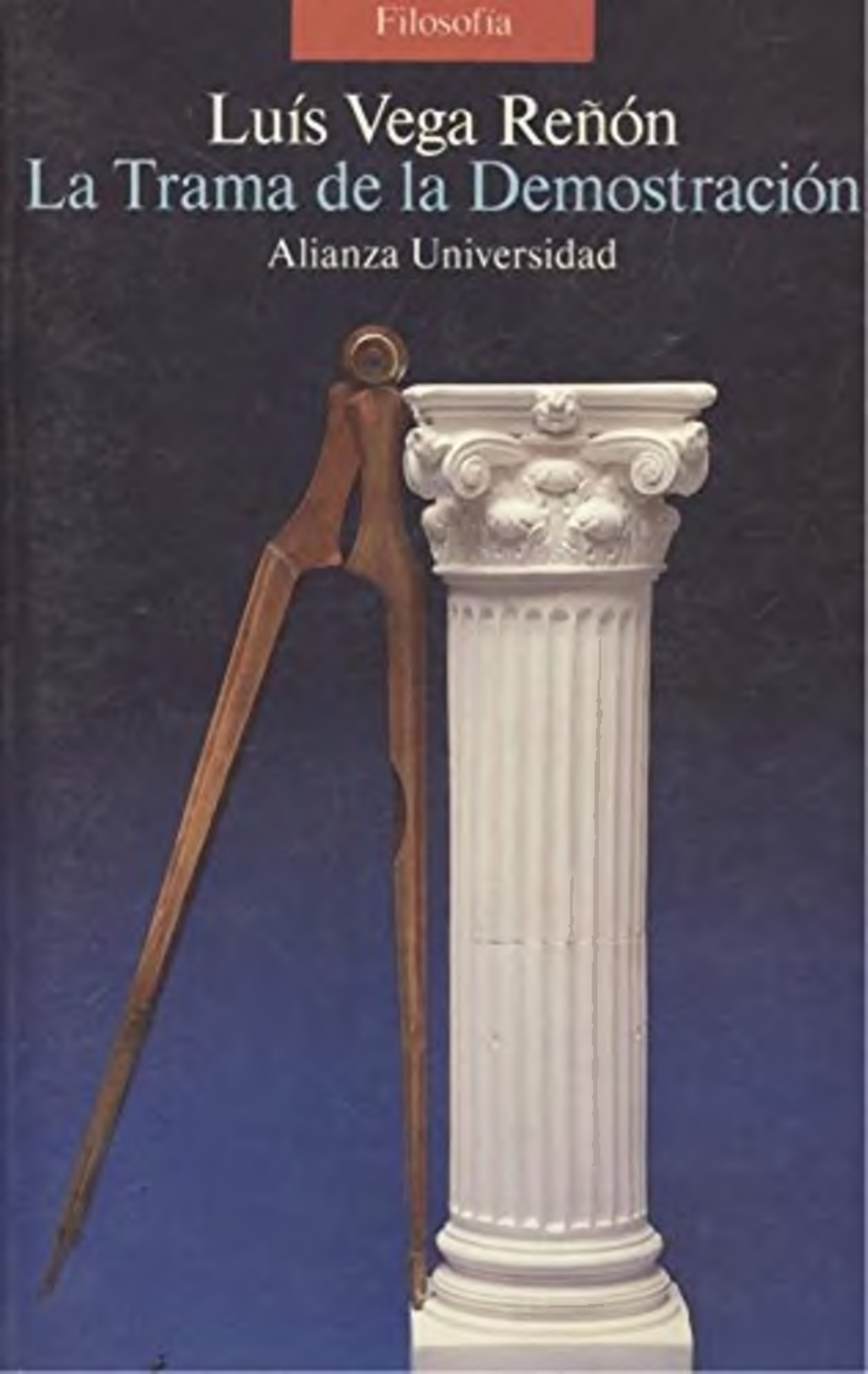

Filosofía
Luís Vega Reñón
La Trama de la Demostración
Alianza Universidad

LA historia de la lógica aún está en buena parte por escribir y la idea de demostración, en particular, es uno de sus personajes en busca de autor. Puede que la propia índole de la demostración haya contribuido a ello, ya que representa una especie de marca fronteriza de la lógica con las matemáticas, la filosofía y la teoría de la argumentación. Al no pertenecer en exclusiva a una de estas disciplinas, las historias de la lógica o de las matemáticas, por ejemplo, tienden a dejarla de lado hasta que la pierden de vista. El presente ensayo de LUIS VEGA REÑON quiere ser una contribución inicial a mejorar esta situación de relativa ceguera por lo que se refiere a la historia de la demostración y de las disciplinas afectadas por ella. LA TRAMA DE LA DEMOSTRACION considera los primeros pasos de esta idea en Grecia: su aparición en un medio alimentado por motivos diversos (desarrollos filosóficos, dialécticos, matemáticos); el programa «fundacional» de la teoría aristotélica de la ciencia; las nuevas luces estoicas sobre el argumento demostrativo y sus secuelas críticas, la alargada sombra del escepticismo, y, en fin, la consagración de uno de nuestros arquetipos de la demostración más influyentes, el tipo de prueba practicado en los *Elementos* de Euclides, al hilo de su pronta institucionalización en la matemática alejandrina. El legado griego no es tan simple o unívoco como podría parecer, pues envuelve diversas «teorías» de la demostración así como notables divergencias entre esos programas filosóficos y las prácticas reales de la prueba concluyente en la tradición matemática.

Alianza Editorial

Cubierta: Angel Uriarte

Luis Vega Reñón

La Trama de la Demostración

(Los griegos y la razón tejedora de pruebas)

Alianza Editorial

La Trama de la Demostración
(Los griegos y la razón tejedora de pruebas)

Alianza Universidad

Calle Milán, 38, 28043 Madrid; teléf. 200 00 45
ISBN: 84-206-2650-3
Depósito legal: M. 37.771-1990
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Avda. del Doctor Federico Rubio y Galí, 16. 28039 Madrid
Impreso en Lavel. Los Llanos, nave 6. Humanes (Madrid)
Printed in Spain

INDICE

Reconocimientos 9

PRELIMINARES: LA IDEA DE DEMOSTRACION 11

I. LA APARICION DE LA IDEA DE DEMOSTRACION 30

1. Una perspectiva general 30
2. Las cuestiones de origen: conjeturas y discusiones... 42
3. La formación de la idea de demostración 69
4. El caso de la reducción al absurdo 78

Referencias bibliográficas 93

II. LA TEORIA ARISTOTELICA DE LA DEMOSTRACION 97

1. Una introducción al espíritu y la letra 97
2. La dimensión lógica de la idea de la demostración... 111
3. La dimensión epistemológica 131

4. La dimensión metodológica de la idea de la demostración 152
5. El sentido del programa aristotélico 164

Referencias bibliográficas 190

III. LA CONTRIBUCION ESTOICA 196

1. Algunas peculiaridades del estoicismo 197
2. La idea estoica de demostración 205
3. La dimensión lógica 217
4. La dimensión epistemológica 240
5. La crítica escéptica 251

Referencias bibliográficas 265

IV. EUCLIDES Y LA PRACTICA DE LA DEMOSTRACION MATEMATICA 269

1. La tradición de la prueba matemática 268
2. Los *Elementos* de Euclides 288
3. La demostración euclídea 344
4. La institucionalización alejandrina y el *Método* de Arquímedes 385

Referencias bibliograficas 406

Marco cronológico 411

RECONOCIMIENTOS

La lógica es desde luego, una materia venerable. Sin embargo, su historia aún está en buena parte —creo— por hacer, esto es, por escribir. Un personaje principal de la tradición lógica que anda todavía en busca de autor es precisamente la idea de demostración. Esta idea, además de rodearse de algunas otras nociones y de ciertas prácticas probatorias más o menos características, viene a constituir una especie de marca fronteriza de la lógica con las matemáticas, la filosofía y la teoría de la argumentación; contemplada en otra perspectiva, representa una encrucijada entre diversas artes del conocimiento y del lenguaje —ya se sabe lo que ocurre con las encrucijadas: son, según los casos, lugares de encuentro o lugares de despedida. Así que tal vez su propia conformación un tanto incierta, promiscua e indisciplinada haga que las historias al uso, acostumbradas a seguir derechamente el curso de cualquiera de esas disciplinas que tocan la demostración, tiendan a dejarla a un lado hasta que la pierden de vista. Con este ensayo me gustaría contribuir a mejorar la situación, aunque sólo sea un principio: me limito a contar los primeros pasos de la idea de demostración, las primeras luces teóricas y el desarrollo de las tradiciones que practicaron de modo deliberado y relativamente sistemático la prueba concluyente en la antigua Grecia. Luego

debería ocuparme del resto de la historia o al menos de las restantes épocas decisivas, hasta nuestros días: si ayer fue la axiomatización, hoy es justamente la demostración misma uno de los centros de atención del análisis lógico y de la filosofía de la matemática más animados; pero, de momento, dejaré todo esto en buenos propósitos.

En un ensayo como el presente, los motivos de satisfacción —si los hay— suelen ser mucho menores que los motivos de agradecimiento. Para no alargar la lista incluyendo a gente como Mª Luisa, con la que las deudas serían tantas como los días, mencionaré únicamente a aquellos a quienes más debe este libro. Emilio Lledó me ha abierto varias vías de acceso al mundo griego, aunque no sé si a pesar de las sensibles pistas que me ha dado en tantos y tan diversos respectos, habré conseguido al fin hacer bueno este camino particular. Geoffrey E.R. Lloyd también me ha prodigado indicaciones preciosas con el valor añadido de su buen humor y de su sagacidad. Por otro lado, consideradas las cosas desde un punto de vista —digamos— logístico, la empresa habría corrido una suerte peor sin la eficiencia reprográfica con que Luis Fernández Moreno me ha ayudado a cubrir las lagunas bibliográficas de nuestro medio y, en fin, quizás no habría llegado todavía a puerto sin la generosa mediación de Carlos Solís.

Madrid, primavera de 1989.

Preliminares:
LA IDEA DE DEMOSTRACIÓN

1.

Hablamos de «demostrar» y de «demostración» en diversos contextos con una generosa amplitud de usos y significados. La gama de los sentidos posibles de estos términos se extiende desde el que tienen frases como (1) «El despliegue de la flota fue una *demostración* de fuerza», o (2) «El agente de ventas hizo una *demostración* de cómo funcionaba el aparato», o (3) «El experimento de Puy de Dôme *demostró* la hipótesis de Torricelli sobre la presión atmosférica», hasta el sentido que alcanza a tener una cláusula del tenor de (4) «Que es lo que había que *demostrar*» con la que se remata la deducción de un teorema matemático.

No es la misma, evidentemente, la idea de demostración que sobreentendemos en las frases (1)-(4). Siendo justos hemos de reconocer que todos estos usos comparten una significación común: la de **mostrar** o **poner algo de manifiesto**. Pero esta referencia es demasiado genérica. «Demostración» tiene en (1) el sentido de exhibir, indicar o dar a entender algo —quizás en este caso por un medio tan efectista—. En (2) tiene el sentido de hacer ver el funcionamiento de un mecanismo mediante una presentación o una «prueba» prác-

ticas de su puesta en marcha y su manejo. En (3) «demostrar» significa constituir una prueba o una evidencia empírica de que algo es el caso; equivale a verificar o comprobar una presunción, una conjetura; no es mostrar algo a secas ni la «demostración» directa de algo, sino un mostrar en régimen completivo e indirecto: el **mostrar-que** una proposición resulta verdadera; por ello suele contraer implicaciones metodológicas que son normalmente ajenas a las *demostraciones* de tipo (1) o (2). Ahora bien, ninguno de los usos (1)-(3) envuelve un proceder y unas características lógicas como las que distinguen a la *demostración* de un teorema matemático en el sentido (4). Por un lado, una demostración de este tipo consiste en una argumentación hilada en el marco de una teoría deductiva, condiciones que están de más en una exhibición o en una «demostración» práctica de algo como las sugeridas en (1)-(2). Por otro lado, esa argumentación sólo tiene el valor demostrativo que corresponde a (4) si constituye una prueba lógicamente concluyente del caso en cuestión, si establece que lo demostrado tiene que ser así y no de otra manera; exigencia que, a su vez, sobrepasa lo que en justicia se podría esperar de una prueba experimental o de una evidencia empírica —en el sentido de (3)— cuando a través de ella queremos averiguar si algo es el caso: pues no hay experiencia que llegue a determinar la necesidad de que algo sea en verdad así, o la imposibilidad de que ocurra justamente lo contrario; no hay experimentos cruciales; no hay experiencias definitivas.

Para colmo, no todos los usos ordinarios de «demostrar» y «demostración» se alinean en esta serie de modos de mostrar (poner de manifiesto, hacer saber) que van desde los más directos y ostensivos, (1) o (2), hasta el más razonado y el más fuerte desde un punto de vista lógico, (4). También se han llamado «demostraciones» ciertos discursos argumentados que, según todos los visos, se caracterizan por demostrar —exhibir o mostrar— cualquier cosa salvo aquéllo que precisamente dicen o pretenden demostrar —probar—. Una especie egregia de este género de falacias son las «demostraciones» de la existencia de Dios, desde el *argumento ontológico* de S. Anselmo —prior de Bec entre 1070 y 1073— hasta, digamos, el *argumentum ornithologicum* de J.L. Borges [1]. ¿Qué podemos decir de tales «de-

[1] El argumento de S. Anselmo —introducido en el c. 2 del *Proslogion* compuesto en la abadía de Bec— reza: «Así pues, Señor, tú que das inteligencia a la fe, concédeme, en la medida en que lo estimes provechoso, el comprender que existes como

mostraciones»? Que bienaventuradas las que por lo menos demuestran talento discursivo, como la de S. Anselmo, o buen humor, como la de Borges. Entre los filósofos también se dan de vez en cuando otras variantes del género urdidas para establecer otras existencias ilustres: la existencia del Ser o la preexistencia del No-Ser, la existencia real del mundo exterior o la existencia ideal de un mundo lógico. Salta a la vista que en todos estos casos sólo se habla de «demostrar» como expresión de un deseo, y de «demostración» a título honorífico; una demostración fallida no es una demostración.

No descubriré ningún secreto si adelanto que el sentido de *demostrar* que interesa aquí, i.e. la idea de *demostración* cuya historia primera —el entramado griego de la idea— intentaré contar, es el sentido congruente con un contexto de uso como (4), donde **demostrar** monta tanto como aducir una prueba deductiva concluyente de que algo es —o no es— efectivamente el caso. Esta precisión no implica que sólo pueda haber demostraciones estrictamente dichas en la deducción matemática; de hecho pueden darse en muy diversos marcos de argumentación, filosóficos y científicos, o incluso en el discurso ordinario. Pero también es cierto que los paradigmas tradicionales de lo que significa *demostrar*, en un sentido técnico, son las demostraciones matemáticas. Con la idea de demostración nos

---

creemos y que eres lo que creemos. Y en verdad creemos que tú eres algo mayor que lo cual nada cabe pensar. ¿O acaso no existe naturaleza tal porque «el insensato ha dicho en su corazón: no hay Dios» (*Ps.* 13, 1)? ... Pero hasta el insensato ha de convenir en que al menos existe en el entendimiento algo, mayor que lo cual nada cabe pensar, pues cuando oye esto lo entiende y lo entendido está en el entendimiento. Ahora bien, sin duda, aquéllo mayor que lo cual nada cabe pensar no puede existir únicamente en el entendimiento. Pues si existiera en el entendimiento únicamente, cabría pensar que también existiera en la realidad, lo cual sería más. Así pues, si aquéllo mayor que lo cual nada puede pensarse existiera únicamente en el entendimiento, entonces se podría pensar algo mayor que eso mismo que es tal que nada mayor se podría concebir. Pero esto es ciertamente imposible. Luego, más allá de toda duda, existe algo, mayor que lo cual nada puede pensarse, tanto en el pensamiento como en la realidad». El «argumentum ornithologicum» es una página de *El Hacedor* (1960) que discurre así: «Cierro los ojos y veo una bandada de pájaros. La visión dura un segundo o acaso menos; no sé cuántos pájaros vi. ¿Era definido o indefinido su número? El problema involucra el de la existencia de Dios. Si Dios existe, el número es definido, porque Dios sabe cuántos pájaros vi. Si Dios no existe, el número es indefinido, porque nadie pudo llevar la cuenta. En tal caso, vi menos de diez pájaros (digamos) y más de uno, pero no vi nueve, ocho, siete, seis, cinco, cuatro, tres o dos pájaros. Vi un número entre diez y uno, que no es nueve, ocho, siete, seis, etcétera. Ese número entero es inconcebible; *ergo*, Dios existe».

ocurre algo semejante a lo que nos pasa con otras adquisiciones culturales. La idea de perspectiva lineal, por ejemplo, puede presentarse en muy diversos lugares. Podemos dar con ella en un tratado de geometría aplicada, en un informe o en un diseño urbanístico, en un relato literario. Pero su «lugar natural», de tener alguno, son más bien las artes figurativas y ahí la hemos *visto* de la mano de los maestros toscanos del Quattrocento. Con la demostración sucede algo parecido: pueden aparecer demostraciones en muy diversos dominios de conocimiento y marcos variopintos de discurso —hasta el punto de que algunos filósofos y teólogos han llegado a sentirse grandes demostradores a los ojos del Señor—; pero su «medio natural» de desarrollo ha sido el hábitat deductivo de las matemáticas. En sustancia, y por lo que concierne al desarrollo histórico de nuestra cultura científica occidental, podríamos suscribir el juicio de H. Scholz, lógico y pionero de la historiografía moderna de la lógica: «Lo que significa *demostrar* o se aprende en la matemática o no se aprenderá en ninguna otra parte» (en su [1939, 1961]: *¿Qué es filosofía?* Buenos Aires, 1973; § 2.6, pág. 56). Los primeros maestros toscanos serían en este caso los matemáticos griegos y Euclides, en particular, habría sido nuestro Masaccio.

2.

La polisemia de nuestros términos «demostrar» y «demostración» no es menor que la de sus descendientes latinos («demonstrare», «demonstratio»). Tampoco desmerece de la que ya envolvían los lejanos antecesores griegos «deíknymi», «deíxis». Los usos de éstos últimos pueden ilustrar no sólo la conformación originaria de este campo de significación sino la manera como se deslinda en él la idea de una demostración propiamente dicha.

El verbo «*deíknymi*» presenta dos vertientes significativas de interés en este contexto: una apunta la acción de **mostrar** algo; otra, la de **probar** que algo es el caso.

«*Deíknymi*», en la línea de **mostrar** se puede entender de dos maneras:

(i) En el sentido de hacer ver, exhibir, poner ante los ojos. E.g.: «¿Acaso no es posible acercarse a un hombre cualquiera y decirle «éste es tu dibujo», y *mostrarle* su retrato o, si se tercia, el de una mujer? Y con «mostrar *[deîxai]*» quiero decir «ponerle ante los ojos

[eis tèn tôn ophthalmôn aísthesin katastêsai]» (Platón: *Crátilo*, 430e).

(ii) En el sentido de dar a conocer, explicar, manifestar o hacer saber por medio del lenguaje. E.g.: «Todo lo hacían (los hombres) sin conocimiento hasta que yo les *mostré [édeixa]* los ortos y ocasos de las estrellas, cosa difícil de conocer» (Esquilo: *Prometeo*, 458).

«*Deíknymi*», en la línea de **probar**, puede emplearse a su vez de un modo vago y genérico —(iii)—, o de un modo más específico y técnico —(iv).

(iii) En el sentido más amplio, equivale a ser una prueba o a dar pruebas de algo: puede incluir las connotaciones de mostrar, indicar, dar testimonio, revelar, probar, verificar. E.g.: «Bien sé que lo intentará, amigo mío. El resultado nos *indicará [deíxei]* si va a quedar en ridículo al intentarlo» (Platón: *Hippias* Mayor 288b); «Yo probaré *[deíxo]* que merece mil muertes» (Demóstenes, 21.21); «El tiempo lo *demostrará (deíxei)*» (Aristófanes: *Ranas*, 1261). También cabe aquí el sentido de comprobar o mostrar la exactitud o la corrección de un resultado por medio de algún procedimiento intuitivo; así es como Sócrates invita al sujeto de una «experiencia gnoseológica» en el *Menón* a dar con la solución de un problema geométrico: «Procura expresarla con exactitud. Y si no quieres hacer cálculos, *muéstrala [deîxon]* en un dibujo» (Platón: *Menón*, 84a). No sólo las ilustraciones gráficas suministran pruebas convincentes en un sentido genérico. Podemos pensar igualmente en otras comprobaciones intuitivas como la que verifica una operación aritmética por medio de la operación inversa (e.g. la división $x/y = z$ por la multiplicación $y \cdot z = x$). La matemática prehelénica ya sabía emplear estos procedimientos de control en la prueba de un resultado numérico o en la corroboración de una regla de cálculo; eran medios suficientes para los fines prácticos perseguidos fueran de carácter sagrado (como la observación astronómica y la confección de calendarios, en Babilonia) o fueran de carácter administrativo y profano (como la distribución de raciones de pan y cerveza, en Egipto). La matemática griega, en cambio, se dio pronto a la contemplación de otros fines un tanto especulativos; esta altura de miras le confirió el aspecto de un estudio liberal emprendido por motivos intelectuales (Proclo: *In Euclidis Primum Elementorum Librum Commentarii*, 65.15-20), pero no mejoró de inmediato sus medios de prueba y, seguramente, los primeros «teoremas» que se atribuyen a los antiguos sabios griegos (Tales, Pitágoras) fueron a lo sumo resultados obtenidos por procedimientos del mismo género: intuitivos, operativos, mostrativos; se-

gún Iámblico, entre los pitagóricos primitivos la geometría pasaba por ser «historia *[historíe]*», i.e. una investigación de cosas que se dan a la vista de testigos (*De vita pythag.* xviii 89). Por lo demás, a nadie puede extrañar que esta especie de matemática «empírica» o «preformal», como hoy ha sido calificada, siga desempeñando luego un papel notable en la práctica informal de los matemáticos griegos, sobre todo en la investigación de ciertos problemas geométricos. De hecho, siempre ha formado parte de la práctica matemática más común a lo largo de la historia [2].

(iv) «*Deíknymi*» adquiere, en fin, el sentido técnico de demostrar un teorema o aducir una prueba deductiva lógicamente concluyente de una proposición. Este nuevo sentido (constatable en el siglo IV a.n.e.) parece mover al empleo específico de «*apodeíknymi*» y derivados —«*apódeixis*»— en contextos lógicos y metodológicos como el de los *Analíticos* de Aristóteles. Pero la utilización de otro término que quiere ser más especializado no excluye el uso pertinente de «*deíknymi*» en esos mismos contextos. E.g.: «Toda demostración prueba algo de algo *[pâsa apódeixis tì katà tinòs deíknysi]*» (*Segundos Analíticos* II 3, 90b33-34). Este es asimismo su uso característico en la cláusula final de la demostración de un teorema en los *Elementos* de Euclides: «*hóper édei deîxai (deikthénai)*» = «Quod erat demonstrandum» = «Que es lo que había que *demostrar*», y a partir de ahí se generaliza para fijar el remate de la exposición *canónica* —digamos— de una deducción geométrica.

Esta última acepción, (iv), es la más fuerte de las cuatro. Por un lado, entraña un proceder metódico determinado: la intervención de un argumento lógicamente válido y concluyente; condición que por lo regular no se cumple ni tiene que cumplirse en los casos comprendidos bajo las acepciones (i)-(iii). Por otro lado, a juicio de los griegos, si alguien *demuestra* una proposición en el sentido técnico de (iv), también hace una demostración en alguno de los sentidos anteriores —hace ver, hace saber, muestra o prueba con razones el

[2] Vid. I. Lakatos: «¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?» en la compilación póstuma (1978): *Matemáticas, ciencia y epistemología,* o.c., pp. 91-102. Un síntoma de la vigencia actual de los usos «experimentales» de la prueba matemática puede ser esta reciente declaración: «El matemático tiene un sentido intuitivo de que cierta proposición debe ser verdadera. La esencia de la demostración consiste en establecer si el resultado es en efecto verdadero o si uno ha sido engañado por tal presentimiento» (C. Plumpton, E. Shipton, R. L. Perry: *Proof.* London/Basingstoke, 1984, p. 1).

resultado en cuestión—; pero según he señalado, no vale la relación conversa. En suma, toda demostración propiamente dicha comporta una exposición y una prueba convincentes; pero no toda exposición ni toda prueba convincente constituyen sin más una demostración propiamente dicha.

3.

Importa mucho discernir estos usos de «demostrar» y las nociones anejas de demostración. Sólo en el sentido (iv) —o en el sentido (4) señalado al principio—, en el sentido fuerte y estricto de «demostrar», podemos atribuir a los griegos la invención de la idea de **demostración** y esta atribución tiene importancia histórica. En especial interesa distinguir entre las pruebas meramente ostensivas —una evidencia práctica, una verificación empírica o una comprobación, como las mencionadas a propósito de (iii)— y la argumentación lógicamente concluyente, la demostración estricta o propiamente dicha.

Los griegos del s. IV a.n.e. llegaron a ser conscientes de esta distinción. No sólo confiaron en poder identificar el sentido oportuno de «*deíknymi*» según el contexto. Además intentaron precisar la diferencia que hay entre la idea genérica de **mostrar** o poner de manifiesto, incluidas las connotaciones de dar una prueba elocuente o hacer una «demostración» práctica, y el concepto técnico de sentar una proposición mediante una **demostración**, con una prueba deductiva lógicamente válida y concluyente. La distinción se extiende a una constelación de términos derivados: unos más bien mostrativos como «*endeíknymi*» o «*epideíknymi*» y otros en cambio específicamente demostrativos como «*apodeíknymi*», «*apódeixis*», «*apodeiktikós*». (Es una distinción que además alcanza a otros términos independientes como «*gráphein*» y «*apophaínein*» cuya acepción más o menos débil —«trazar una figura / construirla» y «declarar o enunciar que algo es el caso / demostrarlo», respectivamente— queda no pocas veces a merced del contexto, e.g.: «Teodoro nos construyó gráficamente *[égraphe]* algo sobre las potencias al cuadrado a fin de demostrarnos *[apophaínon]* que las de tres y cinco pies no son conmensurables en longitud con la de uno», Platón: *Teeteto*, (147d)

Un pasaje del diálogo platónico *Menón*, (81c-86a), memorable por diversos motivos, puede ejemplificar algunas de estas variantes

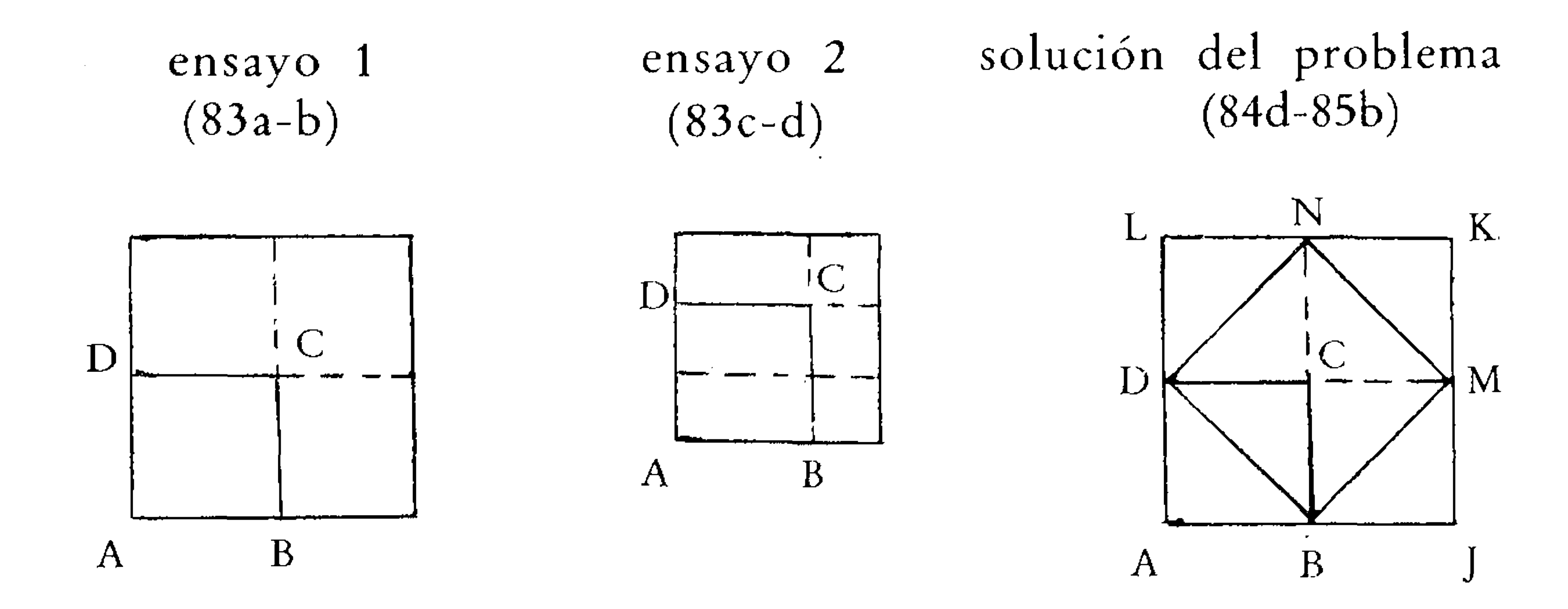
«deícticas», en el sentido (iii), pero no demostrativas en el sentido técnico o fuerte (iv).

Sócrates propone la singular teoría platónica del conocimiento fundada en la noción de *anámnesis:* nuestro conocimiento actual es un reconocimiento de lo ya sabido por el alma en un estado anterior, preexistente al que aquí y ahora encarna. Para la recuperación activa o la reanimación de estas reminiscencias únicamente necesitamos compartir un lenguaje inteligente: siempre que nos encontremos en el marco adecuado de comunicación y de diálogo, estaremos en condiciones de iniciar la investigación pertinente a través de preguntas que vayan despertando el saber dormido y vayan transformando las opiniones o pareceres circunstanciales en verdadero conocimiento, en recuerdo auténtico. El interlocutor de Sócrates, Menón, parece entre sorprendido y curioso ante esta propuesta: «¿Cómo dices eso de que no aprendemos, sino que lo que denominamos aprender es reminiscencia?» (8le), «... si de algún modo puedes mostrarme *(endeíxasthai)* que en efecto es así como dices, muéstramelo *(éndeixai)*» (82a). Sócrates accede: «No es cosa fácil. Sin embargo, por ti estoy dispuesto a empeñarme. Llámame a uno de tus numerosos servidores... para que pueda hacerte una demostración *(soi epideíxomai)* con él» (82a-b). la «demostración» constituye, en realidad, una exhibición de cómo la teoría se verifica en un caso paradigmático: el siervo de Menón, aunque nunca haya recibido ninguna enseñanza de geometría, será capaz de recordar —a instancias de Sócrates y tras unos primeros tanteos— la solución exacta de un problema geométrico elemental: la duplicación de un cuadrado previamente trazado. La única condición que pone Sócrates al ingenuo sujeto de la prueba es que sea griego y hable griego (82b), condición sumamente significativa en varios aspectos tanto filosóficos como discursivos o «dialógicos» [3].

Así pues, el problema consiste en construir un cuadrado cuya superficie sea el doble de la de otro, dibujado en el suelo, que tiene —suponemos— 2 pies de lado. El siervo de Menón avanza un primer intento de solución considerando que duplicar el área de la figura dada equivale a duplicar cada uno de sus lados; Sócrates le

[3] Uno de los significados más relevantes de esta condición guarda relación con la peculiar teoría platónica de la *anámnesis*, vid. E. LLedó (1984): *La memoria del logos,* o.c. pp. 122-39 y 199-201. Pero la condición también tiene interés desde el punto de vista de otros supuestos propios de la argumentación (vid. infra, nota 5).

hace ver entonces que el resultado sería no una superficie doble, sino cuádruple. Como el área del cuadrado trazado originariamente tiene 4 pies (2^2), la del recién propuesto tiene 16 pies (4^2); pero el cuadrado que duplique justamente al original habrá de tener una superficie de 8 pies. Tras este ensayo fallido, el siervo de Menón sigue empeñado en partir de la longitud del lado y opta ahora por una estimación media; si 2 pies es el dato inicial y 4 rebasa la medida de la construcción buscada, la virtud estará en el medio: un cuadrado de 3 pies de lado será el que tenga doble superficie que la figura dada. Sócrates tampoco necesita esforzarse mucho para dejar en evidencia este segundo ensayo: también conduce a un cuadrado de mayor superficie (9 pies) que la correspondiente a la figura buscada. Por fin el muchacho, confundido, cae en la cuenta de su propia ignorancia y es terreno propicio para recibir la gracia de la mayéutica socrática; aunque, eso sí, ésta sólo actuará, al decir de Sócrates, como un estímulo que despierte el saber dormido en su alma. «Vigila —dice Sócrates a Menón— por si me coges enseñándole y explicándole en lugar de preguntarle por su propio parecer» (84d). De esta guisa el inteligente curso de las preguntas de Sócrates, el ejercicio mayeútico del arte de la rememoración, va marcando el camino de la respuesta correcta a partir de la consideración no precisamente del lado sino de la diagonal del cuadrado. Desde el V a.n.e. los griegos conocían la relación existente entre la duplicación del cuadrado y la determinación de una media geométrica proporcional: la media proporcional entre el lado AB de un cuadrado y el doble de este lado, 2 (AB), es justamente la diagonal de dicho cuadrado; y es sobre esta diagonal como cabe construir otro cuadrado cuya superficie duplica exactamente la superficie del cuadrado de partida. La prueba de esta solución, al igual que antes ocurriera con el descarte de los ensayos fallidos, consiste en comprobar intuitivamente el resultado sobre el diagrama obtenido: una diagonal corta el cuadrado inicialmente dado (ABCD, vid. la figura infra) en dos partes —triángulos— iguales, pero a su vez esta diagonal (BD) es el lado de otro cuadrado (BMND) que comprende cuatro de esas partes iguales. Salta a la vista que el segundo cuadrado es doble que el primero.



Este tipo de prueba ya se veía venir en el modo como Sócrates pedía la solución del problema después de los dos primeros ensayos: «Trata de expresarla con exactitud. Y si no quieres hacer cálculos, muéstrala *(deixon)* en un dibujo» (833-84a). Sugerencia bastante oportuna, por cierto, si se tiene en cuenta lo arduo que sería el cálculo numérico de una solución «exacta» sobre la base de una diagonal no conmensurable con el lado [4].

Pues bien, ni la «demostración» de la tesis platónica sobre la anámnesis a través de la experiencia con el esclavo de Menón, ni esta prueba gráfica de la solución del problema geométrico planteado son demostraciones en un sentido estricto. (El mismo Platón, a la luz de la dialéctica analítica que recomienda en la *República* VI, 510b, considerará insatisfactorias no sólo las soluciones suministradas mediante imágenes, sino en general las pruebas geométricas que se detienen en supuestos ocasionales y no se remontan hasta los auténticos principios conceptuales y deductivos, *ibid.* 511a-d.) Pero conviene precisar que el fallo demostrativo radica en el hecho de no constituir pruebas lógicamente concluyentes y, por lo que se refiere en particular a la solución del problema de la duplicación, este defecto no se debe precisamente a la existencia de una construcción geométrica convincente. Las demostraciones propiamente dichas no están reñidas con el poder de persuasión de unos recursos intuitivos como los diagramas geométricos; lo que puede ocurrir, como acontece en este caso del *Menón,* es que tales recursos sean insuficientes.

---

[4] Como el cuadrado buscado, BMND, ha de tener una superficie de 8 pies para ser el doble del cuadrado de partida, ABCD, la diagonal de este cuadrado (el lado del cuadrado BMND) tendrá 2,8284271... pies —con infinitos decimales—; en otras palabras: siendo BD la media proporcional entre AB y 2(AB), $AB \cdot 2(AB) = (BD)^2 = 8$; de modo que $BD = \sqrt{8} = 2,8284271...$

Podemos generalizar estas observaciones. En primer lugar y como norma, ni una prueba o una comprobación empíricas ni una evidencia ilustrativa, por muy convincentes y obvias que resulten, deparan *por sí mismas demostraciones*, i.e. argumentos lógicamente concluyentes. Pero, en segundo lugar, de ahí no se sigue que una demostración genuina no pueda ser intuitiva y haya de renunciar a la pretensión de generar convicciones o evidencias, así como al objetivo de mejorar el conocimiento y la comprensión del caso considerado. Antes bien, el poder de persuasión de una demostración es señal de lo que uno llamaría su «fuerza apodíctica», y este poder junto con las demás virtudes cognoscitivas de las argumentaciones de este tipo fueron cosas sumamente estimadas por los lógicos y los matemáticos griegos, pese a las reservas que periódicamente suscitaron entre algún que otro escéptico. Tampoco se sigue, en fin, la imposibilidad de utilizar figuras como medio auxiliar en las construcciones demostrativas. Aristóteles reconoce no sólo la función aclaratoria del diagrama (e.g. *Meteorológica*, 375b18) sino la existencia de una obvia afinidad entre los diagramas y las proposiciones geométricas (e.g. *S.E.*, 175a27; *Metaphys.* θ 9, 1051a22). Después, comentadores aristotélicos como Ammonio o Asclepio llegan a decir que, en geometría, los diagramas y los teoremas vienen a ser lo mismo (e.g., Ammonio: *In Aristot. Categor.* 14a30: «*diagrámmata dè autà tà theorémata*», *Scholia in Aristotelem,* IV 89b11); la verdad es que esta conexión se aprecia mucho más en las cuestiones que los geómetras griegos se planteaban como «problemas», como unas construcciones a realizar, que en las que consideraban «teoremas» propiamente dichos, proposiciones a establecer. Aun así, Platón y Aristóteles son conscientes de la diferencia que subsiste entre la representación gráfica y el contenido demostrativo de una prueba. Hablando de los métodos de los geómetras, Sócrates dice a Glaucón en la *República*: «Sabes, por ende, que se sirven de figuras visibles y hablan de ellas, pero no pensando en estas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discurriendo con miras al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no con miras a lo que dibujan, y así con lo demás. De las cosas mismas que forman y dibujan se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no podrían ver de otro modo que con el pensamiento.» (VI, 510d-511a). Aristóteles precisa: «Pero el geómetra nada concluye del hecho de esa línea que él mismo ha trazado sino lo aclarado por medio de ella» (*APo.* I 10, 77a1-2). Hasta cierto punto se podría pensar que entienden los diagramas

como una disposición espacial isomórfica de ciertas relaciones lógicas y teóricas entre objetos geométricos (puntos, líneas, ángulos...) determinados. Este es el papel que parecen desempeñar las figuras que acompañan a las pruebas euclidianas en las ediciones de los *Elementos* y, por otra parte, en esa dirección parece apuntar el uso de letras en los diagramas como unas abreviaturas de designación —como una especie de pronombres, no precisamene como variables. Aunque también es verdad que los *Elementos* de Euclides, siguiendo con el ejemplo, no siempre se atienen rigurosamente a este principio de representación: es, en ocasiones, la propia construcción gráfica la que viene a cubrir la laguna de un postulado o de alguna propiedad de la que no teníamos noticia y pasa a ejercer ella misma de base de inferencia. Pero, en cualquier caso, toda demostración responde a la intención de convencer (o convencerse) de la verdad de algo, conlleva una carga conceptual o teórica inevitable y descansa en determinadas relaciones lógicas entre las proposiciones aducidas.

Si el recurso a un procedimiento o a una comprobación directamente intuitivos en la prueba de un resultado poco tiene de particular sobre el telón de fondo de la matemática prehelénica —«Mira», dicen a veces los antiguos textos hindúes al exponer un cálculo—, es notable que los griegos también concibieran la idea del argumento demostrativo lógicamente concluyente. Para este tipo de prueba fue para el que reservaron la denominación técnica de «*apódeixis*».

5.

Los compuestos «*apódeixis*» y «*apodeíknymi*» arrastraban en un principio la significación genérica de «*deíxis*» y «*deíknymi*». Añadían un matiz de mostrar en el sentido de presentar, sacar a la luz o hacer público, e.g.: «Esta es la publicación *[apódeixis]* de la indagación hecha por Heródoto de Halicarnaso» (*Historias*, I. 1); y podían connotar una manera de mostrar lo oculto, desvelarlo o explicarlo. En todo caso, «*apodeíknymi*» mantiene la doble dimensión básica de «*deíknymi*»: la acepción simplemente deictiva (mostrar o dar a conocer algo) y la acepción discursiva (mostrar o dar a conocer que algo es el caso); de ahí que su uso llegue a prestarse a equívocos. E.g.: «Qué, Hippias, ¿no has caído en la cuenta de que yo nunca dejo de poner de manifiesto *[apodeiknýmenos]* lo que considero que es justo?» «¿Cuál es, pues, tu argumentación?» —pregunta Hippias

y, entonces, Sócrates ha de deshacer el equívoco: «Lo pongo de manifiesto *[apodeíknymi]* no por medio de argumentos sino en la práctica» (Jenofonte: *Memorabilia*, IV 4, 10). Platón emplea con frecuencia estos términos en un sentido discursivo y su uso de «*apódeixis*» toma a veces un significado específicamente demostrativo (e.g.: en *Teeteto* 162e se sirve expresamente de él para aludir a la vigencia de la prueba deductiva concluyente entre los geómetras). Sin embargo, Platón no parece preocuparse mucho de su utilización precisa para significar la demostración propiamente dicha (e.g.: en *Parménides* 129b-130a, «*apodeíknymi*» mantiene la acepción genérica de «probar» o aparece como una alternativa estilística a «*apophaíno*» y «*epideíknymi*» cuyas connotaciones habituales son las de «manifestar» o «declarar», «exhibir» o «mostrar»).

El uso técnico de «*apódeixis*» y de «*epideíknymi*» fue acuñado por los *Analíticos* aristotélicos. Si el discurso que declara lo que hay es *apóphasis*, el discurso que explica por qué es así y establece que no puede ser de otra manera es *apó-deixis*. La demostración aristotélica tiene tanto de explicación como de argumentación concluyente. «*Apódeixis*» y «*apodeíknymi*» conservarán esta significación metodológica no sólo dentro de la tradición peripatética sino en la tradición de la lógica estoica. En ambas tradiciones se distingue entre:

(**a**) el discurso plausible, y

(**b**) la argumentación lógicamente válida, «silogística» o concluyente.

Dentro de este ámbito (b) hay asimismo una divisoria entre:

(**b.1**) la demostración concluyente de que algo es efectivamente el caso en razón de otras verdades conocidas sobre su naturaleza o sobre sus nexos y condiciones causales, y

(**b.2**) los argumentos válidos que carecen de estas virtudes demostrativas y explicativas, en suma: cognoscitivas.

Únicamente (**b.1**) comprende las demostraciones propiamente dichas *[lógoi apodeiktikoí]*. En los círculos matemáticos, «apódeixis» también pasará a denotar la demostración canónica en geometría por oposición a otras formas de argumentación, investigación o verificación de resultados; así consta, por ejemplo, en la dedicatoria-preámbulo del *Método* de Arquímenes, 46v2 25-31, donde aparece una clara distinción entre la mera enunciación *[apóphasis]* de un teorema y su demostración *[apódeixis]*.

Los griegos supieron además que la demostración puede revestir formas de argumentación diversas. Dos formas capitales para ellos

fueron la **directa** y la **indirecta**. En medios matemáticos se apreciaron generalmente ambas por igual aunque, a los ojos de algunos filósofos y lógicos griegos, la segunda podía carecer de alguna de las virtudes cognoscitivas que, según Aristóteles, había que esperar de cualquier demostración científica —e.g.: carecería de la virtud de dar una explicación interna de lo demostrado.

Una **demostración directa** consiste en la deducción de consecuencias verdaderas a partir de tesis previamente asumidas o conocidas en el marco discursivo dado. Un ejemplo de argumento directamente demostrativo *[apodeiktikós]*, bastante popular entre los filósofos, fue el siguiente: «Si una mujer tiene leche en los pechos, ha concebido —puesto que la secreción de leche es signo revelador *[semeîon endeiktikón]* de la concepción o de la gravidez—. Esta mujer tiene leche en los pechos. Luego, ha concebido». Este argumento es lógicamente válido —reviste la forma de un patrón deductivo tan familiar como el llamado «Modus Ponens»: de «si α, entonces β» y de «α», se sigue lógicamente «β» (donde «α» y «β» representan proposiciones)—, y establece una conclusión no evidente por sí misma, aunque sí necesaria y cierta a la luz del criterio que esgrimen las premisas. (La formulación dada es de clara estirpe estoica, vid. Sexto Empírico: *Adversus Mathematicos* VIII; 423; pero esta prueba ya había sido reconocida antes por Aristóteles a título de entimema, *APr.* II 27, 70a14-16, y *Rhet.* I 2, 1357b14-17, reducible a una forma lógicamente válida mediante la introducción del aserto general correspondiente «toda mujer que tiene leche en los pechos, ha concebido»; y la creencia en la virtud demostrativa —concluyente y reveladora— del criterio aducido por la primera premisa se remonta cuando menos a Platón, *Menéxeno*, 237e.)

La **demostración indirecta** usual conlleva la reducción de una hipótesis o una suposición inicial a un absurdo lógico, a lo imposible *[eis adýnaton]*: sienta que la suposición conduce a una contradicción expresa o envuelve consecuencias incompatibles con alguna otra proposición ya asumida en ese mismo marco de argumentación o en el cuerpo teórico considerado. Valga como ejemplo la prueba euclidiana (*Elementos* VII 31) de que todo número compuesto es medible por algún número primo.

Supongamos las definiciones VII 2: «Un número es una pluralidad (*[pléthos]*, se sobreentiende finita) compuesta de unidades»; VII 11: «Un número primo es el que solamente es medido por la unidad»; VII 13: «Un número compuesto es el que es medido por algún

otro número». En este contexto la unidad no es un número; por consiguiente, la disyunción entre número primo y número compuesto resulta excluyente y exhaustiva: si **x** es un número, o es un número primo o es un número compuesto. Pues bien, sea **x** un número compuesto. Hemos de establecer que algún número primo divide —mide a **x**. Si **x** es compuesto, hay al menos un número —digamos **y**— que divide a **x** (por la definición VII 13). Ahora bien, **y** es a su vez o primo o compuesto. Si **y** es primo, el teorema queda demostrado. Si **y** es compuesto, hay al menos un número —digamos **z**— que divide a **y**. Pero **z** es a su vez primo o compuesto. Y así sucesivamente *ad infinitum*. Ahora bien, la serie decreciente de los divisores no puede ser infinita (por la definición VII 2); en otras palabras, la divisibilidad infinita es algo «imposible en los números *[adýnaton èn arithmoîs]*». Luego, en última instancia, si **x** es un número compuesto será divisible —medible— por un número primo. Al ser **x** un número compuesto cualquiera, el resultado vale en general para todo número compuesto.

Las reducciones al absurdo, a una contradicción o una incompatibilidad lógicas, no son desde luego la única forma de demostración indirecta que cabe reconocer. También se pueden considerar demostraciones indirectas las que revisten esta forma: dado que si no es el caso de Q entonces no es el caso de P, se sigue lógicamente que si es el caso de P entonces es el caso de Q. Responde a la llamada «contraposición» del condicional (o de la implicación) y esquemáticamente puede formularse en estos términos: de «si no-β, entonces no-α» se sigue «si α, entonces β» (donde «α y «β» hacen como antes las veces de proposiciones). Sin embargo, el arquetipo de la demostración indirecta es sin lugar a dudas la reducción al absurdo.

Por lo demás, tanto la forma directa como la forma indirecta de la demostración pueden considerarse desarrollos especializados de un género de argumentación harto común y familiar, la deducción condicional a partir de un supuesto («si ...») real o posible, algunas de cuyas formas asoman en los ejemplos que acabo de citar.

6.

Las indicaciones precedentes en torno al concepto técnico o estricto de demostración se pueden agrupar y precisar en una caracterización sumaria compuesta por los rasgos siguientes. Una **demostración**:

(i) Consiste en una argumentación. Una argumentación es una manera de dar cuenta y razón de algo ante alguien, puede que uno mismo. Por lo regular, toda argumentación es entimemática: es la parte visible, expuesta, de un iceberg inferencial o discursivo y su significación no se deja identificar con la conjunción o el producto lógicos de las declaraciones expresas. Pero una argumentación puede normalizarse bajo la forma de un argumento: como una serie de proposiciones dispuestas en orden a dar cuenta y razón de que algo es —o no es— el caso. Las proposiciones (sean asertos o suposiciones) aducidas al respecto se denominan *premisas*, y la proposición perseguida a través de ellas (el objeto de la argumentación) se denomina *conclusión* [5].

(ii) Tal argumentación es correcta y da razón de su conclusión, es decir: constituye algún tipo de prueba. Para que un argumento sea una prueba ha de ser visto o reconocido por alguien como prueba en el correspondiente marco discursivo. No es una condición

[5] No voy a entrar en el debate contemporáneo acerca de la estructura de la argumentación. Pero recordaré que entre los griegos la demostración es una argumentación informativa e instructiva, y esto presupone la comunicación de algo a alguien dentro de un marco discursivo: el hacerle saber que en relación con el tema tratado algo es o no es efectivamente el caso. Un marco discursivo encierra ciertas condiciones de entendimiento mutuo que permiten el logro de los fines de la argumentación. Sean X e Y los posibles interlocutores (trivialmente: X e Y son la misma persona y el discurso es una suerte de diálogo interior de uno consigo mismo). Entonces (a) X e Y pertenecen a una comunidad lingüística o se sirven de un lenguaje común —i.e. comparten unos usos y significados lingüísticos así como ciertas relaciones de inferencia y de implicación entre ellos—; (b) X e Y participan también de algunas creencias o de unas nociones supuestas siquiera sea en gracia de la argumentación: (c) X e Y están dispuestos a observar ciertas directrices y convenciones de la transacción cooperativa normal dentro del empleo del lenguaje con fines informativos y argumentales, por ejemplo a decir la verdad o comprometerse con lo afirmado como si fuera verdadero. En realidad, todo esto es lo menos que espera Sócrates del esclavo de Menón al preguntar si es griego y habla griego. Algo parecido supone Aristóteles de los participantes en una discusión o en un ejercicio dialéctico, y de los discípulos a quienes destina los silogismos denominados «didácticos *[didaskalikoì]*» en los *Tópicos* (que no son sino los silogismos «demostrativos *[apodeiktikoí]* » de los *Analíticos*). Una presuposición similar late en las «nociones comunes» de la teoría del conocimiento inferencial y discursiva de los estoicos. En fin, es cortesía de los matemáticos, de los *Elementos* de Euclides en particular, el intento de explicitar (digamos «axiomáticamente») los supuestos o «elementos primordiales» que constituyen un marco discursivo especializado como la geometría, al tiempo que su escritura sistemática de tratados iguala (y «racionaliza») a todo posible interlocutor-lector.

trivial: no supone que cualquier conjunto mejor o peor hilado de proposiciones podrá ser visto como prueba en algún marco discursivo. Ahora bien, sí supone que la calidad de significar una prueba resulta un atributo esencialmente contextual y pragmático.

(iii) La prueba oportuna aquí estriba específicamente en una deducción lógicamente concluyente, de modo que: a/ la conclusión se sigue necesariamente de las premisas aducidas: en virtud de las razones propuestas algo resulta ser así y no puede ser de otra manera; b/ el argumento tiene una vigencia universal, vale para todo caso susceptible de consideración en los mismos términos. Realizando la deducción pertinente uno echa de ver que el argumento es una demostración (tal calidad puede mostrarse a sí misma).

(iv) Desde un punto de vista lógico, toda demostración entraña la mediación de una relación lógica de implicación o de consecuencia entre las premisas y la conclusión: la conclusión **se sigue lógicamente de** las premisas. No es fácil definir el sentido cabal y preciso de esta relación. Pero al menos es familiar una de sus propiedades características: siempre que se dé tal relación, nunca podrá ocurrir que todas y cada una de las premisas sean verdaderas y la conclusión resulte falsa.

(v) Desde un punto de vista epistemológico, una demostración es una prueba deductiva que **nos hace saber** que algo, efectivamente, es —o no es— el caso. Toda demostración tiene un valor cognoscitivo: como mínimo nos da a conocer la existencia de la relación lógica de implicación o consecuencia, antes mencionada, y nos asegura el conocimiento de la verdad de la conclusión una vez conocida la verdad de las premisas; pero no es infrecuente que nos haga entender alguna otra cosa de mayor sustancia, e. g. la razón interna o la causa estructural de que algo sea tal como es y no de otra manera.

De ahí se desprende que la existencia de una relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión es una condición necesaria para apreciar que un argumento dado constituye una demostración; pero no es un criterio suficiente. En justa reciprocidad, la realización de una prueba deductiva basta para reconocer tanto la verdad de la proposición demostrada —en virtud de que lo argüido constituye una prueba—, como la existencia de una relación de consecuencia entre las premisas y la conclusión —a la luz de la deducción de ésta a partir de aquéllas—; pero no es una condición necesaria en ninguno de esos respectos, ni por lo que concierne a la verdad de una proposición ni por lo que concierne a la existencia

de una relación de consecuencia lógica. Es decir: (v) implica (iv), pero no a la inversa.

Así pues, los puntos de vista «lógico» y «epistemológico» contemplan dos dimensiones de la demostración: una es más bien semántica, la otra resulta inequívocamente pragmática. La primera tiene que ver con las proposiciones de que consta el argumento y con las relaciones que se dan entre ellas, en particular la relación de consecuencia lógica. La segunda hace referencia en cambio a unas intenciones argumentales y a una situación o una disposición cognoscitiva: para que algo quede demostrado, alguien ha de efectuar la deducción pertinente y alguien tiene que reconocer el logro del fin demostrativo de esa argumentación. Ambas dimensiones, lógica y espistemológica, son solidarias: son el haz y el envés de una demostración cumplida. Para recordar esta constitución lógica y epistemológica me permitiré utilizar el término «cogencia» una argumentación o es *cogente* o no es una demostración. Pero tampoco olvidemos los signos de una independencia relativa entre las relaciones lógicas y su traducción epistemológica. Por ejemplo, hay argumentos válidos, cuya conclusión se sigue lógicamente de las premisas, y sin embargo carecen de valor demostrativo: no dan razón del caso planteado o no lo prueban de modo concluyente (e.g. si el argumento consiste en una *petición de principio* la conclusión se sigue lógicamente de las premisas con arreglo a la relación clásica de consecuencia, pero no queda probada en la medida en que ella misma es justamente una premisa o supuesto de partida). Por otro lado, bien puede haber relaciones lógicas ignoradas o «fuera de servicio» hasta que alguien realice la deducción correspondiente y esté en condiciones de apreciar sus virtudes metodológicas. Al admitir esto no deseo postular un limbo semántico o algún «mundo» especial en el que las propiedades o las relaciones lógicas de las proposiciones residen antes de materializarse en un uso demostrativo concreto. Sólo quiero recordar algo tan sencillo como la experiencia cotidiana de que no siempre que decimos algo, estamos al cabo de todo lo que decimos; no siempre que asumimos tal o cual proposición, somos plenamente conscientes de todas las implicaciones y consecuencias lógicas que se siguen o podrían seguirse de ella. La historia de la lógica y de la metodología conoce muchos y memorables casos que ilustran esta inconsciencia relativa (e.g. las consecuencias más notables de la negación del «postulado de las paralelas» de Euclides —entre las que aparece la posibilidad de unas geometrías no euclidianas tan consis-

tentes como pueda serlo la euclidiana—, sólo se dejarán ver y demostrar en el s. XIX aunque la negación de este postulado V de los *Elementos*, o de alguna formulación equivalente, ya se había «puesto a prueba» mucho tiempo antes).

Las precisiones que he adelantado en torno a la idea de demostración tienen importancia a la hora de determinar el significado cabal de su invención griega. Están en juego no sólo el punto de la originalidad de esta concepción sobre el telón de fondo de otras culturas prehelénicas, sino la forma en que pudo tener lugar la aparición de un artificio metódico tan especial como el argumento demostrativo y las condiciones que propiciaron su desarrollo más o menos sistemático hasta convertirse en directriz para la organización deductiva de cuerpos de conocimiento. Son precisiones que ante todo parecen necesarias para hacerse cargo del sentido mismo de esta contribución. Pues, sin ir más lejos, el atribuir a los griegos la invención de la idea de demostración supone bastante más que atribuirles el logro de unas deducciones efectivamente concluyentes. A la luz de la doble dimensión lógica y epistemológica de la demostración, la *invención* puede entenderse aquí en el doble sentido de «inventar»: en el sentido de **hallar** o reconocer determinadas relaciones lógicas de implicación o de consecuencia, y en el sentido de **crear** las condiciones discursivas oportunas para construir unas relaciones de este tipo y para establecer mediante ellas un resultado o una serie de resultados concluyentes sobre la base de las razones aducidas. Dicho en otras palabras: al hablar de la invención griega de la idea de demostración no estaremos hablando precisamente de un hecho histórico tan simple como el descubrimiento concreto de algo, sino que más bien nos estaremos refiriendo a la formación de un concepto reflexivo y de una disposición metódica.

Capítulo 1
LA APARICION DE LA IDEA DE DEMOSTRACION

1. *Una perspectiva general.*

Según es bien sabido, algunos griegos adoptaron en una época tan temprana como el s. VI a.n.e. una actitud discursiva y «racional» desusada en el marco histórico de la cultura antigua. Esta actitud consistía no sólo en la pretensión de «dar cuenta y razón *[lógon didónai]*» ante uno mismo y los demás hombres del mundo que nos rodea, sino en reconocer un poder relativamente público e impersonal, la fuerza de la razón, capaz de dirimir por la vía de la argumentación el caso propuesto. A una instancia así apelan, por ejemplo, Heráclito (22 B 50: «No escuchándome a mí mismo sino al *lógos* es sabio convenir en que todas las cosas son una») o Parménides (28 B 7.5-6: «juzga por la razón *[krînai lógo]* el muy controvertido criterio estipulado por mí»).

El desarrollo multiforme de esta actitud dentro de algunas tradiciones y círculos griegos no tuvo parangón en otros medios o estamentos culturales distinguidos de las sociedades coetáneas (escribas egipcios, sacerdotes y magos babilonios, sabios y exégetas hindúes). Este desarrollo representó la aparición de unos modos de considerar la realidad natural y social en los que vemos las raíces del pensa-

miento filosófico y científico de Occidente, y dio lugar a muy variadas formas de argüir, probar o debatir creencias u opiniones a la luz de las razones aducidas. Pero la singularidad de este complejo fenómeno cultural no radica precisamente en la apertura de ciertos dominios del conocimiento, ni en la riqueza de formas de argumentación que practicaban algunos griegos de los ss. V y IV a.n.e. (e.g.: argumentos suasorios en diversas aplicaciones de la retórica, inferencias plausibles a partir de los signos o de las manifestaciones naturales en medicina o en cosmología, confrontaciones y refutaciones dialécticas en filosofía, pruebas concluyentes directas e indirectas en matemáticas). La geometría no nació en Grecia —sino, decían los propios griegos, en Egipto, sintiéndose «como niños» ante la vieja sabiduría egipcia—, y los conocimientos matemáticos y astronómicos babilonios habían precedido en varios aspectos a los helénicos; por otro lado, las matemáticas prehelénicas sabían emplear diversos procedimientos de cálculo y de prueba, y en los textos más antiguos de los Upanisads ya se pueden encontrar discusiones relativamente reglamentadas sobre ciertas cuestiones cosmológicas. La singularidad griega más bien estriba en la conciencia reflexiva y en el análisis crítico de esas diversas formas de dar razón y de convencer a alguien de algo. Se cifra sobre todo en la existencia de cuestiones y de preocupaciones de segundo orden (lógicas, metodológicas, epistemológicas) que conducen desde el s. IV a.n.e., a la racionalización más o menos sistemática de las artes retórica y dialéctica, así como al estudio de las condiciones de efectividad y corrección que corresponden a las distintas clases de argumentos. Este estudio «metadiscursivo» alcanza a formular criterios generales de discriminación entre los usos genuinos y los usos espurios de esas formas discursivas e incluso llega a desarrollar algunos de estos criterios de manera sistemática [1].

---

[1] Por ejemplo, no faltan consideraciones de este tipo sobre la argumentación que apunta la hipótesis o explicación más plausible a partir de signos —donde hoy cabría incluir la «abducción» (Peirce), la «retroducción» (Hanson) o la «inference to the best explanation» (Harman). Aristóteles entiende por signo *[semeîon]*, en general, una «proposición probatoria necesaria o plausible» (*Apr.* II 27, 70a6-7), y distingue el uso correcto del primer caso, el signo necesario *[tekmérion]*, por representar un entimema convalidable como un silogismo (*Ibid.*, 70b1-6); a su vez, los estoicos arbitran un criterio de la corrección del signo propiamente dicho *[ídion]*: consiste en una prueba de coeliminación del antecedente y del consiguiente de su formulación condicional (Filodemo: *De signis*, 1 1-19, 14 2-11). En relación con la refutación, es bien sabido

Por si esta peculiaridad no fuera suficiente, algunos griegos parecen ser acreedores a una originalidad aún más radical precisamente en relación con la demostración y el método deductivo. De hecho, suele tenerse por un tópico histórico indiscutible que las ideas de demostración y de método deductivo son una invención griega y han constituido la matriz racionalista de nuestra cultura filosófica y científica. Hoy quizás no tengamos motivos para poner en cuestión el contenido sustancial de esta creencia, pero sí los tenemos para sospechar que su condición de tópico no contribuye a precisar la significación y el alcance de tales atribuciones. ¿Qué queremos decir al afirmar que las ideas de demostración y de método deductivo son una invención griega singular en su marco histórico? ¿Cómo podría explicarse el desarrollo de la argumentación en general, dentro del mundo griego, y en particular la aparición de la idea de demostración? ¿Hasta qué punto esa invención representa la fundación de ciertas tradiciones racionalistas del pensamiento filosófico y científico occidental, e.g.: la tradición del metódo axiomático? Aunque no tengamos la respuesta cabal a todas estas cuestiones, su consideración puede abrir una perspectiva general conveniente.

1.1

Suele considerarse que las ideas de demostración y de método deductivo son un logro decisivo del pensamiento; marcan el nivel de abstracción y de elaboración conceptual alcanzado por los vuelos teóricos de una rama del conocimiento; en particular, indican la superioridad de la matemática griega sobre otras matemáticas prehelénicas conocidas (e.g. la egipcia, la india, la babilónica) [2]. Esas ideas

que la teoría de la argumentación aristotélica de los *Tópicos* fundamenta el análisis de *Sobre las refutaciones sofísticas*. Y, en fin, en lo tocante a la demostración misma, tanto Aristóteles como los estoicos sientan criterios sistemáticos de convalidación lógica y condiciones precisas de significación epistemológica. Por lo demás, es curioso constatar que si los griegos alcanzaron el nivel de una *lógica* de la demostración, no lograron en cambio una metodología parejamente elaborada de la inferencia empírica (sus criterios acerca de la inferencia plausible a partir de signos, en concreto, son más bien ocasionales; se prestan si acaso a proyecciones epistemológicas —entre los estoicos y los epicúreos, en particular—, pero no tienen un carácter sistemático ni un nivel analítico y metodológico como los de la deducción directa o indirecta, salvo cuando consideran reducibles a éstos).

[2] Según una *boutade* de G.H. Hardy, espejo de matemáticos puros en el Cam-

y la práctica misma de la demostración brillan por su ausencia en los restos de las matemáticas —no tanto primitivas como pragmáticas o, si se quiere, empíricas— que nos han llegado procedentes de estas culturas.

La afirmación de tales méritos no implica el negarse a reconocer que las matemáticas prehelénicas hicieran uso de «demostraciones» en alguno de los sentidos ordinarios del término; ni significa descartar que emplearan, llegado el caso, pruebas para asegurarse de ciertos resultados numéricos o geométricos [3]. Como ya he señalado anteriormente, la demostración no es una invención griega si por ella se entiende cualquier manera convincente de mostrar o probar un resultado.

Planteado con toda crudeza, el punto es éste: a lo largo y ancho del período prehélenico no hay signos de que se sintiera la necesidad de urdir demostraciones concluyentes en la trama deductiva de un cuerpo de conocimientos, ni hay muestras de interés por cuestiones relativas a los aspectos lógicos, metodológicos o epistemológicos de este tipo de pruebas. Por lo demás, cabe pensar —al menos por

---

bridge de los años 1930, «no existe, estrictamente hablando, la demostración matemática... Las demostraciones son lo que Littlewood y yo llamamos verborrea, florituras retóricas destinadas a incidir en la psicología, dibujos sobre el tablero en las clases, mecanismos para estimular la imaginación de los alumnos» (en «Mathematical proof», *Mind*, 38 (1928), pag. 3. Visto así, el invento griego de la demostración sería una futilidad —«graeculus sermo»— sin importancia. Si el lector está convencido de ésto, puede ahorrarse este libro.

[3] Sabemos de la existencia de diversos procedimientos que, a todas luces, apuntan en esta dirección: pautas de resolución para una clase de problemas o para una serie de ejercicios prácticos, tratados con clara conciencia de su reducibilidad a una fórmula general; métodos de reducción de problemas dados a unos términos más simples, como la justificación de un cálculo de áreas y volúmenes complicados por referencia a otro cálculo de áreas y volúmenes más sencillos; técnicas para comprobar resultados, e.g.: tablas de recíprocos arbitradas para el control de divisiones (en la idea de que la división por un número dado, n, equivale a la multiplicación por su recíproco $n/1$). Vid. O. Neugebauer (1952, 1957), o.c.; R. Taton, dir. (1966): *Historia general de las ciencias*, I. Barcelona, 1971, cc. 1 y 2, pp. 32-50 y 119-38; C.B. Boyer (1968), o.c., cc. II-III, pp. 29-68; B. L. van der Waerden (1980), art.c. Pero asimismo conviene recordar las limitaciones de la matemática prehelénica en lo que concierne a la demostración. Vid. K. von Fritz (1955), art.c., pp. 13-14 en particular; A. Szabó (1969), o.c., pp. 185-7; C.B. Boyer (1968), o.c., pág. 67. El énfasis puesto por A. Seidenberg: «The ritual origin of Geometry», *Archive for the History of Exact Sciences*, 1 (1962), pp. 488-527, sobre las pruebas utilizadas por los ritualistas hindúes, enmascara la diferencia entre el uso de una prueba convincente —aunque sea de alcance relativamente general— y la idea precisa de demostración.

ahora— que este silencio sobre las ideas de demostración estricta y de método deductivo quizás no deba atribuirse a una pérdida lamentable de datos elocuentes ni haya de achacarse al precario estado en que se encuentra nuestra documentación histórica al respecto. Pues tampoco hay *señales indirectas* de que hayamos perdido o podamos encontrar una tablilla babilónica, un papiro egipcio o un fragmento indio que contenga un análisis expreso de la noción de demostración o la organización de un cuerpo de conocimientos bajo la forma de cadenas de demostraciones. (Por «señales indirectas» entiendo la expresión de criterios metódicos de corrección o la existencia de reflexiones sistemáticas en torno a cualesquiera otros tipos de prueba, aunque no sean demostraciones en sentido estricto.)

Estando así las cosas, la invención griega de la idea de demostración no consiste precisamente en el uso feliz de una garantía racional en orden a la verificación de un resultado o en el recurso a unas pruebas eficaces, convincentes, sino en la comparecencia de estas tres características:

(i) La construcción y el uso inequívoco de argumentos deductivos efectivamente concluyentes.

(ii) La conciencia expresa de la capacidad demostrativa que poseen tales argumentos en virtud de las relaciones que median entre determinadas premisas y las conclusiones que se siguen de ellas.

(iii) La intención de organizar deductivamente un cuerpo de conocimientos al hilo de una urdimbre conceptual y teórica, y de la correspondiente trama lógica: hay filósofos y matemáticos griegos que abrigan ciertas pretensiones «axiomáticas» y en la ciencia helenística cabe rastrear unas primicias del método de axiomatización que madurará más tarde (con el desarrollo del pensamiento científico y matemático moderno de los ss. XVII-XIX), y hoy podemos denominar «método axiomático clásico».

Estos rasgos (i)-(iii) distinguen conjuntamente la concepción griega de la demostración y del método deductivo, aunque esto no implica que los tres hayan aparecido de modo simultáneo. La idea griega de demostración no surge de manera súbita y plena, revestida de todas sus armas y atributos, como pudiera haber nacido Atenea de la cabeza de Zeus. Insisto en que la invención de las ideas de demostración y de método deductivo exige algo más que el uso de pruebas concluyentes pues este hecho, por sí solo, no entraña la posesión de una idea cabal de la demostración o el reconocimiento de los supuestos lógicos y las virtualidades metódicas de una argu-

mentación de este tipo. Monsieur Jourdain, el burgués gentilhombre de Molière, era capaz de hablar en prosa sin saberlo. También se puede emplear ocasionalmente la prosa deductiva de la razón sin tener conocimiento (idea) de lo que se está haciendo. Pero los griegos dieron asimismo este importante paso reflexivo, aunque les llevara cierto trabajo y algún tiempo. Es muy posible que las primeras demostraciones propiamente dichas daten de la segunda mitad del s. V a.n.e.; sin embargo, habrá que aguardar al siglo siguiente para tener constancia expresa de las ideas mismas de demostración y de método deductivo. Aunque el camino hacia ellas tal vez se abra en el último tercio del s. V a.n.e. a través de diversas contribuciones (matemáticas, filosóficas, dialécticas), lo cierto es que sólo aparecen con claridad en la primera mitad del s. IV a.n.e. y dentro del ámbito intelectual de la Academia platónica. En fin, la organización de proposiciones en secuencias deductivas que parten de unos conocimientos dados y se encaminan a la prueba de otros conocimientos o a la obtención de nuevos resultados, tampoco significa necesariamente la adopción de un método axiomático. Por ejemplo, no será en las primeras compilaciones de *Elementos* matemáticos ni en la invitación de Platón a un orden dialéctico de la deducción teórica donde seguramente se encuentran las primicias de un método axiomático, sino más bien en los *Analíticos* de Aristóteles y sobre todo en los *Elementos* de Euclides (hacia el año 300 a.n.e.).

1.2

¿Cómo adquirieron los griegos su peculiar actitud hacia la argumentación, su sentimiento de que habían de «dar cuenta y razón *[lógon didónai]*» ante alguien de las cosas de su alrededor y de sus relaciones con ellas? ¿Cómo alcanzaron los griegos la madurez cultural que supone el empleo deliberado de esas mediaciones discursivas y, más aún, la conciencia crítica y sistemática de la mediación discursiva misma? No creo que tengamos a nuestra disposición la respuesta cabal a estas cuestiones hace tiempo abiertas en la historia del pensamiento griego. Por un lado sólo conocemos algunas de las piezas que componen el rompecabezas del mundo arcaico de las comunidades del Egeo en el período crítico de los ss. VIII-VI a.n.e.; por otro lado, no sabemos cómo hay que montar en un cuadro histórico articulado y comprensivo las piezas que conocemos; en fin,

más allá de ciertas correlaciones un tanto vagas, ignoramos por qué aparecen justamente entonces determinadas formas de pensamiento racional. Lo único seguro es que este desarrollo discursivo tiene lugar en el marco general del desarrollo de la llamada «*Pólis* griega» (cuyas formas de vida reconstruimos a partir de algunos casos más familiares, e.g. Mileto o Atenas). Y lo más probable es que esa conciencia crítica formara parte del desarrollo de unas formas peculiares de intervención en la vida pública, «política», que facilitan la aparición de un nuevo tipo de «intelectuales» (filósofos, médicos, sofistas...) que cuestionan la sabiduría tradicional —usos arraigados y creencias populares que distan de desaparecer aun en los mejores tiempos de la «ilustración» ática— [4]. Pero, sea como fuere, este complejo marco no invita a pensar en un alumbramiento súbito o instantáneo del Lógos, ni a confiar en un solo factor determinante de maduración o en una línea unívoca de progreso hacia la mayoría de edad de la razón que ya parece alcanzar el mundo ilustrado griego del s. V a.n.e.

Dando por descontado este trasfondo social y cultural quizás demasiado genérico en el presente contexto, tanto la demostración directa como la indirecta pueden considerarse desarrollos específicos de una forma de argumentar a la que calificaré de «inferencia condicional». Esta forma de discurso viene a ser la expresión de inferencias diversas cuyo denominador común es la consideración de una situación o caso real o imaginable, y la reflexión, a partir de tal condición, sobre sus posibles secuelas: «si se da (se diera) el caso A..., entonces se dará (se daría) el caso B ...». Como el ejercicio de esta suerte de inferencias es más bien elemental, no será raro encontrar ya en el propio Homero claras y variadas muestras de su uso [5].

---

[4] Vid. los dos primeros volúmenes de la *Historia y civilización de los griegos* (R.B. Bandinelli. dir. (1978), Barcelona, Icaria, 1982-1984, 10 vols.), que cubren hasta el s. VI a.n.e.; en particular, las contribuciones de E. Lepore (en el vol. I, pp. 191-263), L. Braccesi, G. Maddoli y F. Adorno (en el vol. II, pp. 11-63, 167-243 y 244-297 respectivamente). Un planteamiento comprensivo y lúcido de las cuestiones planteadas por el problema de la explicación de este desarrollo discursivo griego, se encuentra en G.E.R. Lloyd (1979, 1084), o.c., especialmente 4: «Greek science and Greek society», pp. 226 ss.; también en su *Demystifying Mentalities*, de próxima aparición en Cambridge University Press.

[5] Me limitaré a mencionar dos motivos típicos de empleo: 1 / La previsión de lo que sucedería en caso de realizarse una posibilidad o un deseo, e.g.: «si /*ei gàr*, con tal que] Odiseo volviera a casa con su escudo, su yelmo y sus dos lanzas, corta sería

Pero es a partir de mediados del s. V a.n.e. cuando se van fijando unos usos inferenciales propiamente dichos o, al menos, proceden de entonces las primeras muestras documentales de un lenguaje específicamente discursivo y podemos asistir al desarrollo de una deducción condicional. Es ilustrativa la evidencia disponible de una lenta normalización de un sentido inferencial consecutivo en partículas ilativas como «*ára*», «*dé*», «*oûn (oukoûn)*»... Estas partículas empiezan teniendo diversas connotaciones ilativas y secuenciales, e.g. hilvanan el hilo de la narración o una relación temporal consecutiva del tipo: «*post hoc/propter hoc* (tras esto/por esto)». Pero desde mediados del s. V a.n.e. van adquiriendo un sentido más claramente inferencial (especialmente «*oûn*», e.g. en Heródoto), que se generaliza y asienta durante el s. IV a.n.e. gracias sobre todo a la prosa de Platón [6]. En último término será la lógica estoica del siglo siguiente la que mejor aprovechará la forma genérica de la inferencia condicional para diversos usos normalizados, e.g. como expresión canónica no sólo de las proposiciones hipotéticas en general, sino en particular de las definiciones («si es hombre, es animal mortal dotado de razón», Lúculo: *Acad.* II 21), y de las tesis científicas («Si dos figuras son círculos máximos, cada una biseca la otra», «si un hombre tiene una alta frecuencia de latidos, tiene fiebre»).

En todo caso, los griegos alcanzaron a través de la discusión

---

la vida de los pretendientes de Penélope y amargas sus fiestas nupciales», *Odisea,* A 255-58. 2 / El discernimiento de actitudes y de motivos, e.g.: «Agrupa a tus hombres por tribus y familias, Agamenón. Si así *[ei dé hòs]* obrares y te obedecieren los aqueos, pronto sabrás cuáles son los jefes y soldados cobardes y cuáles los valerosos, pues pelearán distintamente; y sabrás si *[ei kaì]* no puedes tomar la ciudad por designio de los dioses o por la cobardía de tus hombres y su impericia en la guerra», (*Ilíada,* B 362-366). No es preciso insistir en la importancia metodológica que luego pueden cobrar estas protoformas de inferencia previsora y de inferencia crítica.

[6] Vid. el clásico estudio de J.D. Denniston (1934, 1950): *The Greek Particles,* Oxford, 1981 7ª reimp. Tendría interés comparar este caso con otras evoluciones coetáneas a la adquisición de ese sentido inferencial por parte de algunas partículas griegas. Por ejemplo, el paso desde la prosa entrecortada de los logógrafos hasta la prosa ligada de los historiadores, a partir de Heródoto (vid. O. Hoffman, A. Debrunner, A. Scherer (1953, 1969): *Historia de la lengua griega.* Madrid, 1973; pp. 175-6); o el desarrollo del discurso retórico y filosófico; y más en general la impronta de la escritura, cuya importancia es notoria para las pruebas geométricas y los incipientes *Elementos* matemáticos (vid. para más detalles los trabajos incluidos en M. Detienne, dir. (1988): *Les savoirs de l'écriture en Grèce ancienne,* o.c.; en relación con el discurso filosófico, vid. las introducciones de E. Lledó (1981), a los diálogos de Platón, y (1985), a las *Eticas* de Aristóteles).

filosófica, la crítica dialéctica y la investigación matemática, un dominio notable de la deducción condicional. Hay motivos para creer que en la primera mitad del s. IV a.n.e. ya tenían cierta familiaridad con el uso de este tipo de inferencia en el marco de lo que llamaríamos «método de hipótesis». Con esto quiero decir que la argumentación griega ya envuelve por entonces nociones como las siguientes:

Algunas proposiciones tienen un valor de verdad o falsedad no sólo determinado, sino establecido. Pero hay proposiciones a las que se les supone ese valor, i.e. han de ser verdaderas o falsas, sin que de hecho y por el momento tal valor sea conocido. Son hipótesis. Una manera de saber si efectivamente son verdaderas o falsas, es la argumentación en los términos de una deducción condicional (a veces es la única manera disponible). La deducción condicional abre aquí dos caminos interesantes: uno se dirige a probar la verdad de la hipótesis y el otro se dirige a probar su falsedad. De acuerdo con el primero, toda argumentación que deduce dicha hipótesis de premisas cuya verdad es conocida, establece que la hipótesis es verdadera. Conforme al segundo, toda argumentación que deduce una conclusión cuya falsedad es conocida bien a partir de la hipótesis misma, bien a partir de la hipótesis junto con otras premisas ya conocidas como verdaderas, establece que la hipótesis es falsa.

En ambos casos, el problema inicial de conocer el valor de la hipótesis (dirimir el punto de su verdad o falsedad) se reduce metódicamente a un nuevo problema: el de dar con la deducción pertinente. Esta reducción puede tener un considerable rendimiento cognoscitivo: puede establecer el valor de verdad o de la falsedad de la hipótesis en cuestión; puede envolver la consideración de nuevas hipótesis; puede mostrar la interrelación entre proposiciones que sabemos verdaderas, o que sabemos falsas, o cuyo valor aún no es conocido; puede alumbrar la idea de que una proposición posee, además de un valor veritativo, ciertos «poderes lógicos» en virtud de los cuales resulta compatible o incompatible con otras proposiciones. Una conciencia práctica de este método de argumentación a partir de hipótesis es la que significan, a mi juicio, ciertos pasajes de Platón como *Fedón*, 100a o 101 d-e, y es la que sugieren algunas referencias del mismo Platón al uso de las hipótesis por parte de los geómetras de su tiempo (e.g.: en *Menón*, 86e-87a), aparte de otros indicios provenientes de los dialécticos y erísticos coetáneos (e.g.: Euclides de Megara recomendaba expresamente juzgar una proposi-

ción por sus consecuencias). Esta sabiduría práctica, este saber cómo afrontar dialécticamente una conjetura, no se traduce de inmediato en la oportuna sabiduría teórica y, como es bien sabido, no hay en Platón una noción técnica de «*hypóthesis*» ni una formulación precisa del «método hipotético». Pero estas primicias ayudan a comprender que el pensamiento griego, a mediados del si IV a.n.e., ya se haya familiarizado con el uso de las dos modalidades —directa e indirecta— de la deducción y la demostración hasta el punto de poder ofrecer en los *Analíticos* aristotélicos un análisis de los supuestos y de la condiciones lógicas de una y otra. Este análisis incluye los conceptos de necesidad e imposibilidad lógica, así como un tratamiento algo informal pero relativamente sistemático de la relación de **«seguirse lógicamente de»** (una relación expresable en los términos: «la proposición Q es una consecuencia silogística de un conjunto determinado y finito P de proposiciones»). Los griegos conocieron con la analítica aristotélica y la dialéctica estoica dos sistemas distintos o dos teorías posibles acerca de esta relación de consecuencia lógica. Además, las contribuciones de estas dos tradiciones, peripatética y estoica, abrieron dos perspectivas distintas —a partir del s. II d.n.e. entremezcladas— sobre el uso demostrativo y concluyente de esa relación. En fin, en el plano metodológico de la demostración directa, los antiguos griegos avanzaron un programa teórico de «axiomatización» (en los *Segundos Analíticos*) y una especie de paradigma práctico (los *Elementos* de Euclides). En esta línea protoaxiomática, amén de otras marcadas por otras tradiciones filosóficas y matemáticas de la prueba deductiva, la invención griega de la idea de demostración y de algunas otras nociones relacionadas con el método deductivo cobra el aire de una fundación lógica y metodológica.

1.3

Sin embargo, no conviene exagerar el alcance de esta fundación. No sólo por motivos de orden general (e.g.: por el simple hecho de que las ideas no hacen su propia historia ni marcan rumbos decisivos o irreversibles y así, sin ir más lejos, al «racionalismo ático» del s. IV a.n.e. le suceden vigorosos reflujos «irracionalistas» en los helenismos de los ss. III y siguientes a.n.e.), sino por razones más concretas.

Por ejemplo, las primicias griegas no constituyen *tout court* el método **clásico** de axiomatización por más que los *Elementos* vengan a ser la fuente primordial de inspiración de este ideal característico de los ss. XVII-XIX. Suele decirse demasiado a la ligera que los *Analíticos* aristotélicos y sobre todo, los *Elementos* euclídeos deparan la axiomática «material» vigente en nuestra cultura hasta que se impone, con las primeras décadas del s. XX, la axiomática «formal» de Hilbert. Es un viejo tópico del que hay que renegar. Ignora o pasa por alto, entre otras cosas, la contribución sustancial del «more geometrico» del s. XVII a unas señas programáticas de identidad de esa axiomatización clásica y el hecho de que sea durante el s. XIX cuando adquiere su plasmación concreta. El método axiomático clásico no es un producto griego, sino más bien una reelaboración moderna; se inspira en el legado matemático griego, desde luego, pero está más pendiente de la administración y aplicación de esta herencia a las nuevas necesidades del desarrollo del conocimiento y no se cuida mucho ni de su conservación ni, al parecer, de la inteligencia de su posible sentido original.

Es claro, por otro lado, que la invención griega tampoco representa una fundación epistemológica de corte dogmático y racionalista como la que dan en sugerir ciertas invocaciones sesgadas. Pienso, por ejemplo, en la que se hace eco del viejo tópico que atribuye a Aristóteles una posición epistemológica «fundamentalista» e «infalibilista», y confunde así la teoría específica de la demostración científica de los *Analíticos*, el programa de la exposición racional de cuerpos deductivos de conocimiento, con la teoría del conocimiento o con la metodología general aristotélicas, por no mencionar otras equivocaciones. Pienso también en la que opone un presunto «Programa Euclídeo» a ciertas alternativas modernas de fundamentación del saber científico como el «Programa Empirista» o el «Programa Inductivista» [7].

Ahora bien, la invención griega de las ideas de demostración y de método deductivo no por ser ajena al racionalismo moderno deja

[7] La confusión primera puede verse en M. Bunge (1962): *Intuición y ciencia.* Bs. Aires, 1965; pp. 9-11. Para la presunción segunda, vid. I. Lakatos (1962): «Regresión infinita y fundamentos de la matemática», incluido en la compilación (1978), o.c., pp. 15-41. Lakatos cae luego, a pie de página, en la cuenta de que su reconstrucción del «Programa Euclídeo» corresponde al ideal del *ordine (more) geométrico* del s. XVII expresado, si acaso, por Pascal.

de moverse en una constelación determinada de supuestos filosóficos. Supone la existencia de un orden ontológico de la realidad o, en particular, del sector investigado. Supone asimismo que esta realidad es cognoscible, que nuestro discurso racional acerca de ella es, en principio, congruente con ese orden objetivo y capaz de expresarlo; incluso en ocasiones e.g. a juicio de los estoicos, el discurso racional viene a considerarse parte y manifestación de la racionalidad misma de la naturaleza: hay un *lógos* inmanente y común a todas las cosas. Así pues, también supone que el discurso racional es un medio transparente de hacer saber el orden propio de las cosas. Por lo tanto, la necesidad racional de una demostración no es una necesidad formal o vacua, sino el correlato justo de la necesidad esencial o causal inherente al tipo de objetos referido y a sus propiedades derivadas. La demostración, aunque sea un discurso capaz de explicarse a sí mismo y defenderse por sí mismo, como sugiere Platón y ratifica Aristóteles, no es un discurso encerrado en sí mismo o vuelto hacia sí mismo. El orden deductivo, aunque se manifieste en un dominio más o menos autónomo constituido principalmente por los conceptos y por los significados, no responde tanto a una estructura de la mente o a una estructura del lenguaje como a la estructura del dominio estudiado. En este sentido constituye un orden objetivo de pensamiento. Consiguientemente, la demostración es una operación metódica informativa y mejora o aumenta nuestro conocimiento: bien porque nos hace saber la razón o la causa propia, inherente a un tipo de cosas, de que éstas sean como son; bien porque pone de manifiesto que hallándose las cosas ligadas como están, nunca podrán darse de otra manera. Ambos aspectos cognoscitivos de la demostración son obviamente complementarios; si acaso, Aristóteles muestra relativamente más interés por el primero, por la determinación de los tipos de cosas que hay y sus propiedades esenciales, mientras que los estoicos se interesan más por el segundo, por la obtención de criterios significativos de la regularidad y necesidad de los procesos naturales. En todo caso, el método deductivo es la vía maestra para conocer (o, de modo característico en el medio helénico, para enseñar y aprender) la organización interna no sólo de un tejido conceptual o una disciplina teórica, sino ante todo la del ámbito real correspondiente. Este realismo natural —por lo regular al margen de otras connotaciones filosóficas originales de su matriz helénica— sí parece ser uno de los legados de los antiguos modelos griegos que la axiomática clásica toma y subsume. Por ejemplo, los

siglos XVII y XVIII no ven en la geometría euclídea una matemática aplicada o interpretada —la realización de una determinada teoría matemática pura—, sino más bien una (vertiente de la) filosofía natural o una ciencia sustantiva del espacio real. Pero ésta será otra historia. Su curso propiciará, entre otras cosas, una conciencia epistemológica y metodológica más fina de la relación entre las matemáticas y la realidad física (e.g.: el planteamiento de cuestiones del tenor de «¿cómo se explica que nuestras construcciones y deducciones matemáticas encuadren y determinen tan eficazmente la realidad natural?»).

2. *Las cuestiones de origen: conjeturas y discusiones.*

Como, por lo regular, hemos de emplear las palabras y faenar con las cosas antes de parar mientes en cuál puede ser la mejor manera de tratar con ellas, todas nuestras nociones y pautas metodológicas tienen visos de artificio. Pero, en efecto, pocas habrá tan artificiosas como la idea misma de demostración. A diferencia de otros modos de argumentar y probar, el recurso a la deducción sistemática carece de precedentes prehelénicos y la idea estricta de demostración no representa un desarrollo natural de la práctica de la persuasión sino una especie de mutación metódica de los hábitos ordinarios del discurso entre los propios griegos. Quizás por este motivo, su origen y formación es una cuestión fascinante para quienes se interesan en la historia del pensamiento y de los métodos científicos. Lo cierto es que la aparición del método deductivo y de la idea de demostración en la antigua Grecia ha suscitado vivas discusiones durante las primeras décadas del presente siglo y aún sigue concitándolas. ¿Cuándo, cómo, de dónde les vino a los griegos esta feliz ocurrencia?

La respuesta a la pregunta por los orígenes de algo no suele ser fácil ni simple. Y si se trata de los orígenes de la idea de demostración, la cuestión resulta especialmente complicada. Para empezar, nos encontramos con una deprimente falta de noticias, con una documentación demasiado parcial, indirecta y equívoca. Podemos convenir —a fin de no precipitar una discusión posterior— en que la primera prueba efectivamente concluyente data de antes del siglo IV a.n.e. y pudo tener lugar ye en un medio filosófico y dialéctico, ya en un medio matemático. Pues bien, la información acerca de ese

medio filosófico y dialéctico es sumamente ambigua en este respecto particular, y los datos disponibles acerca del medio matemático son fragmentarios y escasos. De modo que habremos de conformarnos con conjeturas más o menos razonables.

A estas dificultades de documentación se añaden otras de diverso signo. Unas están provocadas por la propia índole de aquéllo cuyo origen se trata de averiguar. Otras pueden derivarse de una actitud hermenéutica inadecuada.

En relación con las primeras, recordemos que el uso inicial (si se quiere, el hallazgo) de una prueba lógicamente concluyente no acredita por sí solo una conciencia pareja de la idea cabal de demostración o un conocimiento reflexivo de sus virtudes metódicas. Así pues, la constatación de una primera prueba concluyente, que puede remontarse al s. V a.n.e., no establece sin más el logro originario y decisivo de la idea de demostración. Ni siquiera más tarde, ya entrado el s. IV a.n.e., cuando la argumentación deductiva es relativamente familiar, se podrá inferir que todo uso feliz de la deducción entraña una conciencia clara de la lógica de la demostración. Sirva de muestra el propio Platón. En su obra no faltan pasajes en los que, tras sugerir una deducción al absurdo efectivamente concluyente, se limita a dar muestras de una conciencia tenue, vaga y vacilante de la fuerza lógica de la conclusión (e.g.: en el *Teeteto*, después de reducir cumplidamente al absurdo la presunta identidad entre la sensación y el conocimiento científico, se conforma —sin intención irónica— con aventurar: «parece darse algo de imposibilidad», *Teeteto*, 164b8); por contra, hay ocasiones en las que el Sócrates platónico cree establecer la necesidad irrecusable de algo con argumentos francamente capciosos (e.g. *Fedón,* 78d ss.).

Este posible desfase entre el «hecho» semántico de una prueba concluyente y la formación de una idea cabal de la demostración previene de la tentación de considerar su origen como una fundación cumplida e instantánea. Es en este contexto donde aparecen las dificultades creadas por una actitud hermenéutica inadecuada. Tradicionalmente se ha querido ver en el **origen** de algo una fundación radical más o menos decisiva. Conforme a esta disposición hermenéutica, el origen de una buena idea o de una ocurrencia feliz tenía que correr a cargo de alguien, un autor o un precursor, y había de producirse como un acontecimiento singular: es el suceso que marca un punto de partida, un corte tajante o un logro definitivo en un lugar y en un momento precisos. Pues bien, en lo que concierne a

las ideas de demostración y de método deductivo, parece claro que esta hermenéutica tradicional del **origen**, además de suscitar muchos más problemas de los que puede resolver a la luz de la documentación disponible, nos propone un enfoque completamente inadecuado de la cuestión.

En lo que sigue, empezaré indicando cómo aparece, en mi opinión, la primera prueba concluyente que podemos identificar inequívocamente como tal. Luego discutiré algunas propuestas, más o menos deudoras de la hermenéutica tradicional, que o bien fijan el origen de la idea de demostración en la dialéctica eleática (particularmente, en el *Poema* de Parménides), o bien atribuyen el origen del método deductivo a una mediación decisiva de la dialéctica filosófica (eleática o platónica). La segunda opción —esta alternativa de una mediación— descansa a veces en otro tópico harto socorrido de la historia de la matemática antigua: el presunto estallido de una «crisis de fundamentos» a raíz del tropiezo de los antiguos pitagóricos con una magnitud inconmensurable. Por mi parte, no creo en una fundación originaria, unívoca o decisiva de las ideas de demostración y de método deductivo sino en una lenta, compleja y promiscua gestación de padre natural desconocido (como padre putativo nos sirve Aristóteles). Terminaré señalando varios motivos y líneas de desarrollo (en filosofía, en dialéctica, en matemáticas) que vienen a contribuir a una conformación expresa de la idea de demostración dentro del seno acogedor y fecundo de la Academia platónica.

2.1

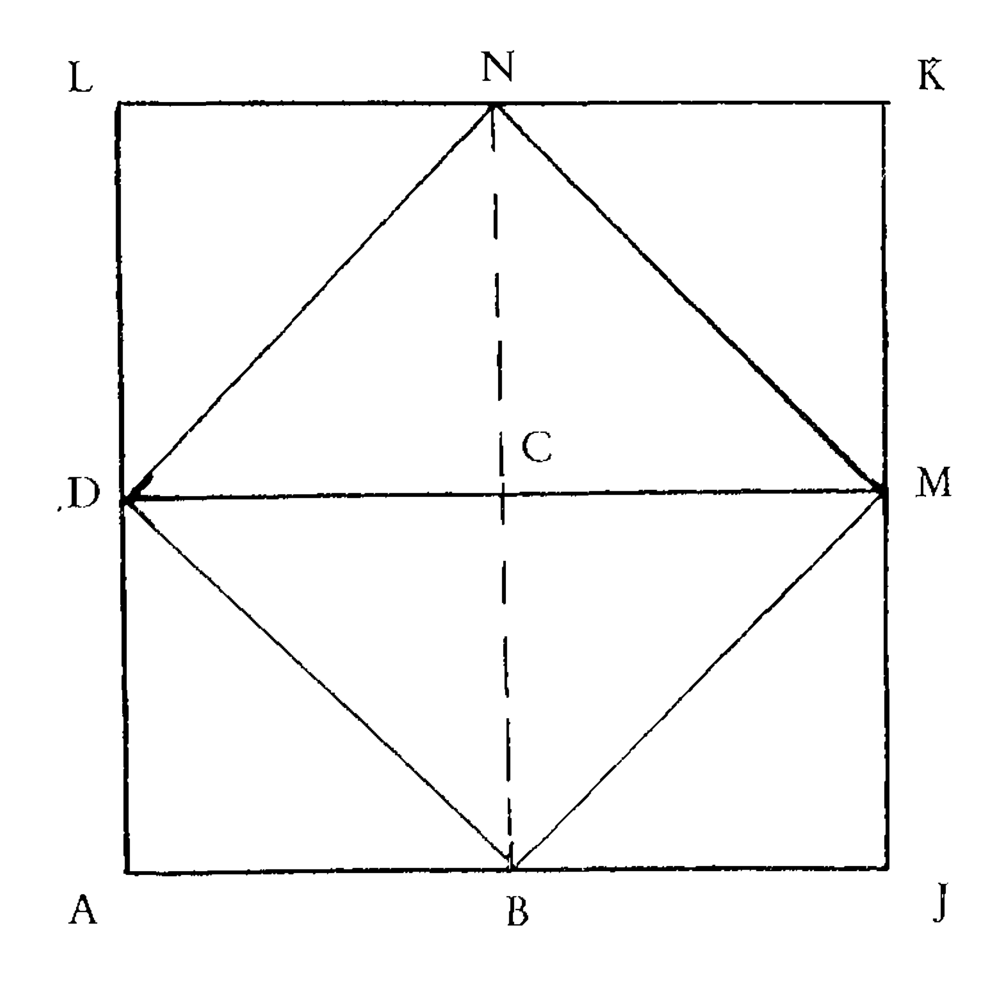
A mi entender, la primera prueba lógicamente concluyente de que tenemos noticia es la reducción al absurdo de la conmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado, en los términos transmitidos por Aristóteles (*APr.* I 23, 41a26-30): de la suposición de su conmensurabilidad se sigue la contradicción lógica de que el ser un **número impar** sea un atributo idéntico al opuesto, el ser un **número par**. Esta y otras alusiones parecidas de Aristóteles hacen pensar en la existencia de una demostración familiar por entonces, —en la 1ª mitad del s. IV a.n.e.— que hoy desconocemos. A veces se ha considerado que el argumento en cuestión no es otro que el introducido como un apéndice al libro X de los *Elementos* de Euclides (prop. «X 117»); precisamente Alejandro de Afrodisia, al glo-

sar el pasaje citado de Aristóteles (*In Anal. Priora*, 260-1), aduce una prueba de corte similar al «euclidiano». Sin embargo, a pesar de su aparente éxito posterior, esta identificación carece de fundamento [8].

Según todos los visos, la prueba original procede de medios pitagóricos —o al menos copartícipes de la doctrina pitagórica— y data seguramente de la 2.ª mitad del s. V a.n.e. Depende de una reducción lógica al absurdo en los términos de **número par e impar** y está claro su contexto matemático o, más en particular, geométrico; probablemente, la matemática pitagórica se dio de bruces con el fenómeno de la inconmensurabilidad cuando investigaba las relaciones y razones numéricas entre magnitudes y se planteaba problemas como el de la determinación de medias proporcionales.

Una reconstrucción tradicional apunta un tipo de prueba emparentada con la duplicación del cuadrado que Platón recuerda en el pasaje ya citado del *Menón* (82b-85b). Convengamos en que la solución del problema ha dado lugar a la figura adjunta. Si el lado DB es conmensurable con la diagonal DM, sus magnitudes se podrán representar numéricamente conforme al número de veces que mide a cada una alguna medida alícuota, exacta, común a ambas. Reducimos los números correspondientes a su menor expresión de modo que ambos términos no puedan ser a la vez números pares. Si llamamos *número cuadrado* al producto de dos factores iguales, a los cuadrados DBMN y AJKL corresponden números cuadrados. Como cabe apreciar en el diagrama, AJKL es el doble de DBMN, y le corresponde por ende un cuadrado par. Su lado, AJ, también será entonces un número par. De modo que DM, siendo igual a AJ,

[8] Tal identificación figura de manera expresa en Heath (1921): *A History of Greek Mathematics*, edic. c., I, pag. 21; y de modo tácito o implícito, en muchas historias generales de las matemáticas, e.g. C.B. Boyer (1968): *Historia de la matemática*, o.c., V §9, pag. 106. Pero no hay motivos para asegurar que esa fue la demostración que sentó originariamente la existencia de magnitudes inconmensurables. Más bien los hay para pensar lo contrario. La prueba de los *Elementos* incluye términos técnicos (e.g.: «inconmensurable en longitud *[mékei asýmmetros]*») que responden a un estado relativamente maduro de la investigación sobre líneas inconmensurables. Supone, además, una cuidadosa distinción entre números y magnitudes, que es justamente consecuencia del descubrimiento de la inconmensurabilidad y, al parecer, contraviene algunos supuestos atribuibles a la antigua ortodoxia pitagórica. En todo caso, si, como parece aceptado, el hallazgo de la inconmensurabilidad fue un tropiezo casual de esta tradición pitagórica, no es muy verosímil que al establecer el resultado por vez primera ya estuviera perfectamente al tanto de todas estas secuelas.



resultará asimismo par. En consecuencia, DB, será el que tenga la condición de impar. Como DBMN es el doble de ABCD, según consta por la solución del problema de su duplicación, el número cuadrado de DBMN es el doble del número correspondiente a ABCD. Luego, el número de DBMN es par y, por consiguiente, el número de su lado DB resulta igualmente par. Pero esto es lógicamente absurdo puesto que la deducción anterior nos había llevado a que, siendo DM par, DB tenía que ser impar. Por lo tanto, la suposición de que la diagonal DM sea conmensurable con el lado DB es una hipótesis inviable: desemboca en una contradicción manifiesta.

Esta prueba es efectivamente concluyente. Descansa en cierto desarrollo teórico de la aritmética, en el conocimiento de algunos resultados geométricos elementales y en un supuesto característico. Todo ello parece al alcance de los pitagóricos del s. V a.n.e. El desarrollo teórico subyacente en una demostración como la indicada no pasaría de ser el comprendido por el conjunto de nociones y proposiciones artiméticas siguiente:

(i) Definiciones.

1. Un número es una pluralidad (finita) de unidades.
2. Un número par es el que puede dividirse en dos partes iguales.
3. Un número impar es el que no puede dividirse en dos partes iguales.

(ii) Tesis.

1.a La suma de cualquier pluralidad de números pares es par.
.b La suma de una pluralidad par de números impares es par.
.c La suma de una pluralidad impar de números impares es impar.
2.a El producto de un número cualquiera por un número par es par.
.b El producto de un número impar por un número impar es impar.

Se siguen como corolarios:
a) Si n es un número par, su cuadrado n^2 es par; y a la inversa: si n^2 es par, su base n es par.
b) Si n es impar, su cuadrado n^2 es impar; y a la inversa[9].

Los resultados geométricos elementales vienen a ser los relativos a la duplicación del cuadrado o, más en general, los relacionados con la búsqueda de una media geométrica proporcional **x** entre un lado **n** y su doble **2n** (i.e. tal que $\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{2n}$). También cabe aplicar el «teorema» de Pitágoras si, como variante, se parte de la condición par del número correspondiente a DB puesto que $DB^2 = 2BA^2$.

El supuesto, en fin, consiste en una imposibilidad arimética: no cabe una subdivisión infinita de un número entero. Este supuesto justifica la reducción de los números inicialmente considerados a su menor expresión de modo que ambos términos no puedan ser números pares. La suposición postula que el número consiste en una cantidad determinada de unidades, es algo que se puede contar al mismo tiempo que sirve para contar («una multiplicidad medida y una multiplicidad de medidas», como resume Aristóteles la concepción pitagórica, *Metaphys.* N 1088a5-6). Desde luego, esto poco tiene que ver con el atomismo numerológico o con la doctrina de la unidad como constituyente último e irreductible que a veces, con escaso fundamento, se han atribuido a los antiguos pitagóricos. Pero sí parece invitar a una extrapolación de este método de contar a toda operación de medida en general: el número-medida de una magnitud debe ser entonces el múltiplo de una parte alícuota y determinada,

[9] Esta reconstrucción en términos de definiciones y tesis no debe inducir a error sobre la índole informal y posiblemente empírica de la teoría original: tales nociones y proposiciones se pueden ver como generalizaciones a partir de unos procedimientos elementales de hacer cálculos con guijarros («calculi») o marcas, los llamados «*pséphoi*-methods» de echar cuentas —Vid. W. Knorr (1975), o.c., c. V, pp. 134 ss.—. Lo cual no es óbice para la indudable precisión de la nociones numéricas involucradas.

sea cual fuere, de la magnitud dada. De hecho este procedimiento funcionaría bien en ciertos casos, por ejemplo en el estudio de las razones numéricas existentes entre las longitudes de dos secciones de la cuerda de un monocordio. Sin embargo, el resultado de la prueba acerca de la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado vendría a mostrar que esa suposición aritmética intuitiva no puede extenderse impunemente a cualesquiera magnitudes geométricas.

La versión de la prueba que he adelantado no es la única razonable. La evocación de los intervalos musicales en relación con la teoría pitagórica primitiva de las razones numéricas sugiere precisamente otra interpretación interesante. Según esta nueva versión, los pitagóricos podrían haber llegado al mismo resultado aplicando un procedimiento de sustracciones sucesivas [*anthyphaíresis* —más conocido hoy como «algoritmo de Euclides»—]; a la luz de algunos términos empleados en las referencias a este procedimiento, podría haber estado ligado originariamente a la teoría musical [10]. En todo caso, podemos presentar este método en un lenguaje moderno de la forma siguiente. Sean dos números, **m** y **n**, cuya medida común máxima se trata de hallar. Procederemos para ello mediante estas reglas:

R 1. Formulamos los números en cuestión como un par ordenado, con el menor situado a la derecha en calidad de segundo miembro: «[**m**, **n**]».

R 2. Si **n** = 0, entonces «[**m**, **n**]» se transforma sencillamente en «**m**».

R 3. Si **n** ≠ 0, entonces sustraemos **n** de **m** y escribimos «[**n**, **r**]», donde **r** es el resto de esa sustracción.

Una variante bien conocida utiliza la división en lugar de la sustracción. En ambos casos, si **m** y **n** son cantidades conmensurables, el procedimiento es efectivo: la regla 3 se aplica un número finito de veces hasta conducir a la aplicación de la regla 2 y, con ello, a un número **k** que constituye el máximo común divisor de dos números dados, **m** y **n** (Euclides, *Elementos*, VII 1, 2); o a una magnitud **k** que constituye la medida común máxima de las magnitudes **m** y **n** consideradas (*Ibid.*, X 3). Pero cuando se tropieza con inconmensurables, el proceso continúa hasta el infinito, con restos progresivamente decrecientes (*Ibid.*, X 1-2). Pues bien, los pitagóri-

[10] Vid. Szabó (1969): *The Beginnings* ..., o.c., 2 §2.8, pp. 134-7.

cos se habrían encontrado con magnitudes inconmensurables al aplicar el procedimiento de *anthyphaíresis* a la determinación de la razón media y extrema entre un lado y una diagonal dados (ésta es la razón que hay entre dos líneas A y B —con A > B—, cuando la mayor, A, es la media proporcional entre la suma de ambas, A + B, y la más pequeña, B). La no conmensurabilidad de estas magnitudes se desprendería de la inconsistencia entre, de una parte, la progresión o regresión al infinito de su razón métrica mutua y, de otra parte, el concepto de número como conjunto finito de unidades. ¿Sería una prueba de este tipo la que condujo al fatal encuentro con las magnitudes inconmensurables? La verdad es que todo lo que cabe asegurar al respecto es que los matemáticos griegos, a finales del siglo V a.n.e., conocían tanto el procedimiento de *anthyphaíresis* como la existencia de inconmensurables; pero no hay indicios de que utilizaran el primero para establecer la segunda; al parecer, se sirvieron de él como un método para lograr cálculos numéricos aproximativos; ahora bien, este uso no conduce a una imposibilidad lógica sino a progresiones o regresiones indefinidas —que sólo una remisión indirecta al absurdo puede clausurar en el marco de la prueba deductiva finita de un resultado definido—; este uso «logístico», en el primitivo sentido griego del término, no implica de suyo una inconmensurabilidad de derecho, aunque pueda significar una limitación práctica, la no conmensuración de hecho. En esta diferencia piensa Aristóteles cuando advierte que el suponer que la diagonal *[diámetros]* es conmensurable con el lado aunque nunca se llegue a verificar esta medida, equivale a no caer en la cuenta de la imposibilidad propia del caso: «Si lo posible es lo que hemos dicho en cuanto que es realizable, está claro que no cabe que sea verdad decir que tal cosa es posible pero no sucederá, puesto que, admitido esto, no se vería el sentido del «ser imposible», por ejemplo: si uno afirma que es posible que la diagonal sea conmensurable con uno de los lados, aunque así no ocurra —sin tener en cuenta el «ser imposible»—, porque nada impide que siendo posible que algo sea o llegue a ser, no resulte o llegue a resultar. Pero es necesario, según lo establecido, que, aun suponiendo que existe o ha llegado a existir lo que no existe pero es posible, nada imposible venga a resultar —y en caso de ser posible, resultaría—, puesto que es imposible que la diagonal sea conmensurable con uno de los lados. Así pues, no es lo mismo «falso» que «imposible»: "que tú estés de pie ahora es falso, pero no imposible" (*Metaphys.* θ 4m 1047b3-14).

Podemos resumir las relaciones entre la *anthyphaíresis* y la inconmensurabilidad en los siguientes términos: a/ si el proceso *anthyphairético* termina, si nos encontramos ante una divisibilidad finita, es obvio que las magnitudes en cuestión tienen una medida común, quedan efectivamente conmensuradas y por lo tanto son conmensurables; b/ si el proceso continúa indefinidamente, es falso que las magnitudes resulten efectivamente conmensuradas pero de ésto solo no se sigue que sean inconmensurables —la no conmensuración de hecho no implica una imposibilidad de principio—; c/ por contra, si esas magnitudes son inconmensurables, el proceso de *anthyphaíresis* nunca tendrá final, es infinito. También cabe decir que la divisibilidad finita y la divisibilidad indefinida son aplicaciones perceptibles del método anthyphairético, de modo que la conmensurabilidad en la primera situación y la no conmensuración en la segunda son cosas que, por así decir, «saltan a la vista»; pero la inconmensurabilidad es algo que no deja mostrar sino que tiene que demostrarse.

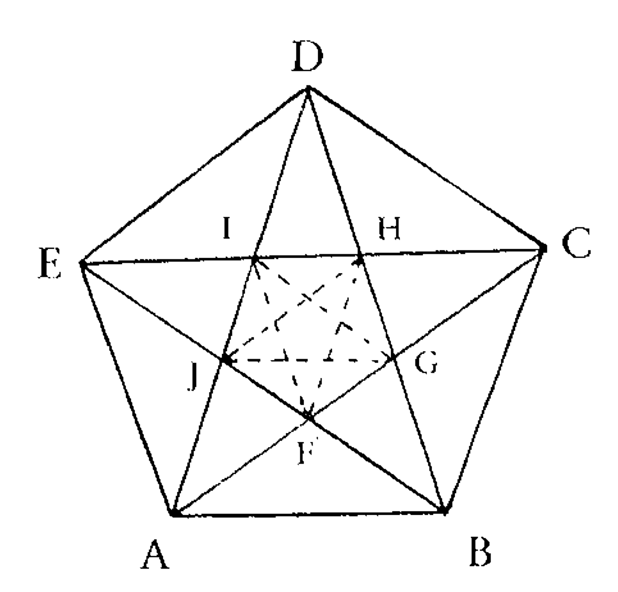
Estas consideraciones tienen importancia a la hora de comparar el caso de la diagonal y el lado del cuadrado, que he tomado como el objeto de referencia de la primera prueba concluyente, con otro candidato propuesto en este sentido: el caso de la diagonal y el lado del pentágono regular [11].

---

[11] Vid. K. von Frizt (1945): «The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum», art. c. Al parecer, esta hipótesis ya había sido aventurada por G.J. Allman: *History of Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1879. Después de von Fritz, ha sido retomada por G. Junge: «Von Hippasus bis Philolaos», *Classica et Mediaevalia*, 19 (1958), pp. 41-72; en especial, pp. 43 ss. Todavía encuentra considerable eco entre historiadores de las matemáticas griegas, por lo que merece una breve consideración.

El lado y la diagonal del pentágono tienen la peculiaridad de originar la sucesión numérica más simple en el proceso de medición mutua de dos segmentos y deparan así una refutación clara y sencilla del supuesto de conmensuración. La prueba puede discurrir como sigue: veamos el pentágono ABCDE y tratemos de medir el lado DE con la diagonal AC paralela a él por razones de simetría. EFCD es un paralelogramo, luego CF=DE. Así pues, DE está contenido por entero en AC y queda como resto AF. Tratemos ahora de medir AF con AG (AG=DE porque AGDE es asimismo un paralelogramo). AF está contenido por completo en AG y FG es el segmento restante. Pero FG es el lado del pentágono interior FGHIJ, cuya diagonal HJ es igual a AF en virtud de que AFHJ es un paralelogramo. Vuelve a darse de nuevo la relación inicial y el proceso anthyphairético de medición mutua puede proseguir indefinidamente. Pero este resultado es incompatible con el supuesto numérico de la divisibilidad finita. Luego, en definitiva, habrá que suponer que la diagonal del pentágono es inconmensurable con el lado.

El hallazgo de unas magnitudes inconmensurables para las que el método numérico entonces habitual no suministraba un cálculo efectivo fue, por lo que podemos colegir, un tropiezo imprevisto.



Pues bien, convengamos en dos datos no controvertidos: está en juego el punto de la conmensurabilidad y la cuestión se dirime a propósito del lado y la diagonal de una figura plana: el cuadrado o el pentágono. Ahora cotejemos los méritos respectivos de estos candidatos. En favor del pentágono obran sus sencillas propiedades de simetría, su asociación con el pentagrama y la posibilidad de aderezar con un nombre propio el hallazgo de la inconmensurabilidad; Hípaso de Metaponto. Las propiedades de simetría son obvias. Pero los otros dos motivos son discutibles. El pentagrama —la estrella de cinco puntas formada por las diagonales de un pentágono regular— pasa por ser un emblema o distintivo pitagórico; siendo así; parece muy posible que algún pitagórico al estudiar esta configuración diagramática cayera en la cuenta de la inconmensurabilidad y pergeñara una prueba semejante a la ya indicada; no obstante, de la virtud emblemática del pentagrama sólo tenemos noticias muy tardías, que proceden de fuentes helenísticas. Los testimonios acerca del protagonismo de Hípaso en este asunto son todavía menos convincentes: K. von Fritz agrupa y hace confluir en Hípaso textos separados de Iámblico, comentador que escribe unos siete siglos después del acontecimiento y es harto propenso a recoger los ecos legendarios del pitagorismo antiguo: e.g., en *De Vita Pythagorica* (xxxiv, 246-7) cuenta que el pitagórico que reveló la existencia de los inconmensurables fue expulsado de la secta o pereció en el mar; en *De communi mathem. scientia* (77 17-25), refiere que Hípaso pereció en el mar por divulgar la constitución de la esfera de los doce pentágonos; pero en ningún momento relaciona Iámblico ni algún otro comentador a Hípaso con el descubrimiento o con la prueba de la inconmensurabilidad. En favor de mi opción por el caso del cuadrado cuentan tanto el hecho de su carácter no menos elemental que el del pentágono como su relación con la antigua tradición matemática: con el problema de la duplicación y con la construcción de los números denominados «lado» y «diagonal» del cuadrado, relación de la que tenemos unas referencias relativamente próximas en Platón. Pero, sobre todo, cuenta el testimonio aristotélico de su calidad de prueba por reducción al absurdo en nombre de los atributos par-impar. En suma, aunque el *descubrimiento* de una magnitud no conmensurable discurriera al hilo de la anthyphaíresis —e incluso a propósito del pentágono regular—, la *prueba efectiva* de la inconmensurabilidad exige una argumentación tan contundente como la que he adelantado al principio.

Aunque no sabemos cuándo tuvo lugar este evento, sólo en el último tercio del s. V a.n.e. empieza a tener cierto eco crítico: en matemáticas propicia una investigación más abstracta, de mayor alcance teórico, que requiere métodos de prueba concluyentes y relativamente precisos. (En otros ámbitos, dialécticos y filosóficos, también se dejan sentir las repercusiones de la divisibilidad indefinida del continuo geométrico sobre las concepciones cosmológicas de Demócrito e incluso de algunos pitagóricos, como Filolao o Euryto.) Luego, quizás en torno al 400 a.n.e., la conclusión general de que no toda cantidad (magnitud, número) es determinable cabalmente a partir de un entero dado o de sus partes (fracciones) alícuotas, además de constituir un resultado probado, racionalizado, llega a ser objeto de análisis relativamente sistemáticos segun cabe colegir de la fama que acompaña a Teodoro y, tras él, a Teeteto (vid. Platón: *Teeteto*, 147c-148b). Seguramente su primera demostración, sin duda geométrica y referente a una diagonal y un lado (no a la popular raíz cuadrada del número 2 aunque guardara relación con nociones aritméticas como las de par e impar), apareció al principio de este proceso, ya avanzada la segunda mitad del s. V a.n.e. También es probable que esta demostración fuera tan elemental e intuitiva como la sugerida en la reconstrucción que he asumido. Por último, es natural que este resultado estuviera relacionado con algunos de los problemas que por entonces se venían planteando los matemáticos llamados por van der Waerden «pitagóricos anónimos de la tercera generación», situados entre autores como Hípaso o Alcmeón y autores como Filolao o Teodoro; uno de esos problemas podía ser la investigación de medias geométricas proporcionales (al menos, por una tradición que recoge Eutocio —en su comentario al tratado *Sobre la esfera y el cilindro* II de Arquímedes—, sabemos que Hipócrates de Khíos, coetáneo de esos pitagóricos de la tercera generación, se planteaba la duplicación del cubo como un problema reducible al de determinar dos medias proporcionales en proporción continua, de modo análogo a como la duplicación del cuadrado podía reducirse a la determinación de una media proporcional).

2.2

Entre los historiadores del pensamiento antiguo cunde la opinión de que el *Poema* de Parménides contiene asimismo alguna reducción

al absurdo lógicamente concluyente [12]. La cuestión estriba entonces, si se participa en la ceremonia tradicional de una fundación originaria, no sólo en determinar cuál es anterior, el uso filosófico y dialéctico de la reducción al absurdo o el uso matemático, sino en precisar cuál sirvió de fuente de inspiración al otro.

La contribución más notable a la tesis de una fundación originaria eleática de las ideas de demostración y de método deductivo es una serie de trabajos de Arpad Szabó iniciada en los años 50 [13]. La interpretación de Szabó se puede resumir en los términos siguientes:

a) En el *Poema* de Parménides aparecen por vez primera la noción de contradicción lógica y su uso metódico para la obtención de una demostración indirecta. Los argumentos de Zenón constituyen a su vez la defensa dialéctica de la filosofía de Parménides —e.g: el repudio de la evidencia sensorial y de cualquier concepción pluralista o dinámica de la realidad basada en la percepción común de sus manifestaciones—, y desarrollan el método deductivo de la reducción lógica al absurdo.

b) El uso de la demostración indirecta (al establecer la existencia de cantidades y magnitudes no conmensurables), el abandono de las pruebas visuales o gráficas y la adopción de una perspectiva antiempírica son signos coincidentes del cambio de rumbo de la matemática griega hacia una fundamentación deductiva. Esta transformación no es comprensible como una evolución interna —¿por qué se da entre los griegos y no entre otros matemáticos parejamente dotados como los babilonios?—; además tiene lugar de forma súbita e inesperada, bien que subsiguiente a las contribuciones de los eleáticos. De modo que sólo puede explicarse en razón de presiones externas, filosóficas y dialécticas, esto es: a la luz de la decisiva mediación de los filósofos de Elea.

c) Por lo demás, la filosofía de Parménides y la dialéctica de Zenón tendrán asimismo una repercusión conceptual y teórica en la culminación de esta nueva orientación, i.e. en la axiomatización euclídea

---

[12] Vid., por ejemplo, C. Eggers, en la edic. c. de los presocráticos, vol. I (1978), pp. 17 y 404-5; G.E.R. Lloyd (1979, 1984), o.c., pp. 69-71 (cfr. sin embargo su (1969): *Polaridad y analogía*, edic. c., pp. 102-108, donde parece bastante reticente en este punto); A.H. Coxon (1986), o.c., pp. 178-9, 194.

[13] Vid. en particular, «Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?», *Acta Antiqua*, 2 (1956), pp. 109-52; (1964): «The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation of definitions and axioms», art. c.; (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics*, edic. c. (1978).

y en su constitución de la geometría como ciencia del espacio. Las bases deductivas de los *Elementos* de Euclides, algunas definiciones y axiomas en particular, responden en tal sentido a las paradojas de Zenón en torno a las nociones de magnitud y extensión; algo parecido ocurre con la posición antiempírica de Euclides.

Más adelante, al estudiar la significación metodológica de los *Elementos* euclídeos (c. IV), habrá ocasión de discutir esta tentadora imagen que presenta a Euclides revestido de los atributos de un Zermelo en la «primera crisis de fundamentos matemáticos» declarada. Ahora nos atendremos a la presunta fundación eleática de la demostración indirecta. La versión de Szabó ha merecido en varias ocasiones serias críticas no sólo hermenéuticas sino de orden cronológico [14]. Aquí me limitaré a hacer unas observaciones más bien conceptuales.

Para empezar, no está nada clara la responsabilidad de Parménides o de Zenón en la gestación del método deductivo. Por un lado, es discutible que hicieran efectivamente uso de demostraciones indirectas o reducciones lógicas al absurdo pues, de hecho, no alcanzan a conocer la lógica de la contradicción. Por otro lado, en el mejor de los casos, de ese uso no se seguiría sin más la fundación del método deductivo (recordemos la diferencia ya apuntada al principio entre los hallazgos sustantivos, de primer orden, como el descubrimiento de un objeto o de un fenómeno nuevo, y las innovaciones metodológicas, de segundo orden, como el tomar conciencia de una nueva dimensión de la investigación o el dar con un procedimiento adecuado para moverse por ese terreno). En fin, de haberse dado ese feliz acontecimiento en la filosofía eleática, esto tampoco excluiría la posibilidad de un parto análogo en matemáticas, sobre todo cuando no hay la menor noticia sobre una correlación entre estas dos posibles formas —dialéctica y matemática— de aparición de la reducción al absurdo.

Pero, ahora, la cuestión a dilucidar es el punto central de si Par-

---

[14] Baste mencionar las discusiones a que ha dado lugar en el Coloquio intern. de filosofía de la ciencia del Bedford College (Londres, 1965), recogidas en I. Lakatos, ed. (1967): *Problems in the Philosophy of Mathematics*, pp. 9-27; o en la Conferencia de Pisa (1978), recogidas en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds. (1980): *Ancient Axiomatics...*, o.c. J.L. Berggren, en su informe (1984): «History of Greek mathematics: a survey of recent research», art. c., menciona la discusión suscitada por la tesis de Szabó como el primer foco de interés de los cuatro que hoy revisten, a su juicio, mayor significación para la Hª de la matemática griega.

ménides efectivamente dio con una reducción lógica al absurdo en el curso de la discusión filosófica que devana en su *Poema* o, en términos más generales, si logró pergeñar un argumento concluyente.

En principio, no es fácil identificar el tipo de argumentación que Parménides emplea en el Poema para dejar sentado que lo que es *[tò eón]*, es *[estì]*, mientras que lo que no es *[tò me eón]* no puede ser de ninguna manera, y por consiguiente es necesario que lo que es sea; tampoco es fácil comprender las razones que le mueven a poner tanto énfasis en una tesis de apariencia un tanto abstrusa. Sin embargo, tomando una línea de interpretación relativamente acreditada [15], podemos encontrarnos no sólo con una tesis filosófica notable sino con una argumentación interesante.

La tesis reza: lo que es —incluyendo en esta referencia todo lo concebible y expresable con verdad, todo lo que constituye el objeto propio y auténtico de la investigación racional—, se da absolutamente —es el caso y existe— y tiene que darse por necesidad así. Esta interpretación supone, de una parte, explicitar el sujeto o la referencia del conciso verso «que es y que no es posible no ser» (28 B 2 3) en el que se presenta el camino de la persuasión y la verdad, el camino del conocimiento racional; supone, de otra parte, discernir algunos aspectos significativos del uso de «es (ser)» en el *Poema*. Por lo que concierne al primer punto, las declaraciones de los vv. 28 B 2 3 y 28 B 8 1-2, sobre la vía de la verdad, —que lo que es, es—, pueden leerse a la luz de 28 B 3 y 28 B 6 1-2 («Pues lo mismo es lo que puede ser y pensarse», «Se debe decir y pensar lo que es; pues le es posible ser —darse efectivamente— mientras que a la nada no le es posible ser») y a contraluz del v. 28 B 2 7 («no conocerás lo que no es (pues es inaccesible»): entendemos entonces que la referencia primordial de la atribución de ser es aquéllo que constituye no sólo un objeto posible de investigación sino también el objeto genuino del conocimiento. Este supuesto podría formularse así: si algo es objeto de conocimiento, es y no puede no ser.

Para precisar el alcance de este supuesto consideremos el sentido

---

[15] La línea, por ejemplo, de G.E.L. Owen (1960): «Eleatic Quaestions»; W.K.C. Gutrhie (1965): *Historia de la filosofía griega*, II, o D.J. Furley (1967): «Parmenides of Elea». También me hago eco de las contribuciones filológicas de Ch. Kahn (1973): *The Verb «Be» in Ancient Greek*, o.c., y (1986) «Retrospect on the Verb "To Be" and the Concept of Being», en S. Knuuttila y J. Hintikka, eds.: *The Logic of Being*, o.c., pp. 1-28.

de tal atribución: ¿qué significa el verbo «es (ser)» en este contexto? Hay buenas razones para pensar que un aspecto siginificativo relevante del uso del verbo *eînai* por parte de Parménides es su acepción aseverativa: en esta acepción «es» toma el sentido de «es el caso (así es efectivamente)». Es el sentido de frases como «esto es tal como digo», «lo que digo es verdad», «así es realmente la cosa». Conviene reparar en que el sujeto gramatical de este uso no es propiamente una forma nominal, sino proposicional: la acepción aseverativa implica afirmar algo con una voluntad de verdad como constancia de que tal es el caso en realidad. Así pues, ese supuesto característico del argumento de Parménides se podría formular: «si la proposición **P** es objeto de conocimiento, entonces es necesariamente el caso de que **P**»; o en términos más próximos a una concepción actual del conocimiento: «"X sabe que **P**" implica "**P**"» —J. Hintikka sugiere el nombre de «ley de Parménides» para una regla de su lógica epistemática que corresponde a ese supuesto (en su (1962): *Saber y creer*, Madrid, 1979; c. 2, § 2.3, p. 65)—. Este aspecto aseverativo no es el único que distingue el uso de «es (ser)» en el contexto del *Poema*. Otras dos connotaciones asociadas a dicho aspecto y derivadas de la contraposición entre ser y no ser en absoluto, son cierto sentido existencial y cierto sentido predicativo del uso de *estì*. Su derivación podría revestir la forma: si algo *es* en el sentido de *darse el caso*, entonces *hay* (existe) algo *tal*. Esto conlleva una suerte de deslizamiento desde un aspecto de la significación de «es», referido a casos, estados de cosas o sujetos de forma proposicional, hasta otros aspectos o modos significativos que suponen más bien objetos sustanciales o sujetos —digamos— nominales, como el *exìstir* o el *ser tal o cual cosa*. (Una ambigüedad similar puede apreciarse no sólo en otros pensadores influidos por Parménides, como Melisso e.g.: 30 B 8: «Sólo < lo > uno es»—, sino en algún pasaje de Platón e.g. *República*, V 478a-479b— y de Aristóteles— e.g. *APo.* II, 2 90a 1-5.)

Sobre esta base podemos reconstruir la argumentación capital de Parménides en los términos siguientes, donde «es $_1$ (ser $_1$)» marcará el dominio del aspecto aseverativo y «es $_2$ (ser $_2$)» pondrá en cambio el acento sobre el aspecto existencial. **a**) Todo aquello que cabe pensar o decir y constituye un objeto propio de conocimiento, es $_1$ y no puede no ser $_1$. **b**) Si algo es $_1$ puede ser $_2$, mientras que lo que no sea $_1$ tampoco puede ser $_2$ (28 B 6 1-2). **c**) Ahora bien, lo que constituye el objeto propio del conocimiento y es $_1$, o es $_2$ absolu-

tamente o no es $_2$ (28 B 8 11). d) Pero no es posible que no sea $_2$. e) Luego, necesariamente es $_2$.

De ahí se desprenderán luego otros atributos del ser como su resistencia a toda suerte de generación, cambio o diferenciación interna. El procedimiento de inferencia es similar: supuesta una contraposición absoluta entre lo que es y lo que no es, Parménides se irá desplazando desde los aspectos aseverativo y existencial de «*eînai*» hasta otras connotaciones más bien predicativas —e.g. el aspecto de estabilidad e inmutabilidad patente en la oposición «*eînai*» (ser)/ «*gígnesthai*» (llegar a ser)—. Naturalmente, con esto no quiero decir que la labor de Parménides se reduzca a una simple exploración lingüística. Se trata más bien de un trabajo analítico sobre el discurso racional, de un dejarse guiar por la razón misma del lenguaje, acorde con la actitud que Aristóteles atribuye a los eleatas: «se debe seguir solamente el *lógos*» (*De Gen. et Corrupt.*, I 8, 325a13). En todo caso, su elucidación conceptual de las implicaciones de «*tò eòn*» y «*eînai*» se beneficia de esa particular matriz de significación al tiempo que, llegado el caso y en atención a motivos de orden discursivo y filosófico, la enriquece —por ejemplo, el uso existencial absoluto de «*estì*» o el énfasis en la connotación de estabilidad de «*eînai*» constituyen aportaciones eleáticas al lenguaje y al pensamiento filosófico posterior—.

¿Hay en la argumentación de Parménides una prueba lógicamente concluyente de su tesis capital sobre la vía de la verdad?

Para empezar, una reducción de este tipo supone el uso efectivo de la idea de contradicción. Creo que no hay rastro de este uso en la argumentación de Parménides —como tampoco lo hay de unos principios lógicos de identidad y no contradicción que generalmente también se le atribuyen—. Lo que Parménides esgrime es más bien una contraposición absoluta entre extremos contrarios, ser y no ser. Tal oposición queda lejos de constituir una contradicción a pesar de sus pretensiones radicales, omnímodas. Son justamente estas pretensiones las que excluyen una idea propiamente dicha de contradicción pues la contradicción implica, sin ir más lejos, que la atribución de un predicado a un sujeto es esencialmente susceptible de verdad o falsedad y que, por ende, una afirmación no es significativa a menos que también lo sea la negación correspondiente. Así pues, sólo cabe decir (pensar, proponer) con sentido que algo es esto o lo otro si cabe decir (pensar, proponer) con sentido que no es justamente tal cosa. Pero el no ser de Parménides equivale a no ser nada en abso-

luto, a no ser ni siquiera un posible objeto de expresión o de pensamiento. (Y es curioso que puestas así las cosas, Parménides se las arregle para sacarles tanto partido.) Quizás Parménides se dejó llevar a la tesitura de contraponer el ser-y-existir-absolutamente *versus* el no-ser-nada-en-modo-alguno por el mismo contexto de usos de «*eînai*» que le facilitaba el movimiento desde los aspectos aseverativos hasta los existenciales y predicativos. En ese marco de significación, el «es» aseverativo parece conducir de modo casi imperceptible al «es» existencial y al predicativo, como ya he apuntado anteriormente. Parece un deslizamiento inocuo en los contextos afirmativos: si algo es efectivamente el caso (e.g. si el cielo es azul), entonces hay o existe algo (el cielo) así (a saber: azul) —incluso en Aristóteles pueden detectarse usos de la construcción «X es Y» como si fuera equivalente a «el XY existe»—. Pero es fuente de confusión y motivo de falacias en los giros negativos: puede llevar a pensar que «*tò me eón*»,como negación de lo que realmente es el caso [«*tò eón*»], consiste en un vacío absoluto: en un no-sujeto carente de existencia y atributo alguno; naturalmente, si se toma el no ser de este modo, como *nada,* nadie podrá extrañarse de que resulte impensable e indescriptible. Ahora bien, esto no es otra cosa que forzar la contraposición de modo que cobre la apariencia de una disyuntiva absolutamente excluyente y absolutamente exhaustiva. En suma, la argumentación hilada por Parménides no sólo discurre al margen de la idea de contradicción, sino que además ignora o pasa por alto ciertos supuestos del sentido que tiene una predicación y no repara en las condiciones de efectividad de la evaluación veritativa (al menos, por lo que concierne a los asertos negativos y a las proposiciones falsas).

De hecho, la deslumbradora revelación de Parménides sobre lo que es y no puede no ser, los escarceos erísticos en torno a la verdad y la falsedad, y, en fin, los abusos de los sofistas, buenos pescadores en las aguas revueltas de la predicación, fueron todos ellos motivos que hicieron apremiante la requisitoria de Platón en el *Sofista*: ¿qué es lo que se quiere significar con la palabra «*on (lo que es)*»? «Pues está claro —confiesa el Extranjero con cierta sorna— que vosotros lo sabéis hace ya tiempo, mientras que nosotros creíamos saberlo antes pero ahora nos vemos en un aprieto. Por consiguiente, instruidnos primero sobre este particular a nosotros, no sea que pensemos entender lo que decís y ocurra todo lo contrario» (*Sofista,* 244a). La perplejidad del Extranjero puede explicarse perfectamente a la luz del argumento de Parménides y de la contraargumentación

de Gorgias: nada hay; si algo hubiera, sería incognoscible; si algo hubiera y fuera cognoscible, sería inexpresable (vid. *De Melisso, Xenophane, Gorgia*, 979a12 ss.; Sexto Empírico: *Adversus Mathematicos*, VII 65 ss.).

En realidad, si se acepta la línea de interpretación indicada, la argumentación de Parménides puede sugerir qué es lo que quiere significar cuando dice que lo que es, es, pese a no disponer aún de un lenguaje filosófico tan dúctil como el trabajado por Platón. Su argumento resultará entonces el remedo no de una demostración indirecta por reducción lógica al absurdo, sino de una especie de «prueba disyuntiva»: no es posible a la vez tanto ésto como aquéllo otro; ahora bien, no aquéllo; luego, ésto. Vía que, de suyo, conduce a la exclusión de la opción opuesta a la que se pretende mantener, pero no a la demostración de la imposibilidad lógica misma de la opción excluida. Algo similar acontece con las implicaciones que Parménides trata de extraer para probar que lo que es, es inengendrable (vid. 28 B 8 6-11, 20-21): son una vez más usos extremados de la contraposición, pero no descansan en una disyuntiva lógicamente contradictoria. Para colmo, todo indica que a lo largo de la argumentación principal de la tesis y de la ulterior explicitación de sus implicaciones, Parménides —pese a sus deseos de contundencia— ni siquiera intuye la índole de una demostración. Por ejemplo, el texto 28 B 5: «Indiferente [*xýnon*, «común, coincidente»] es para mí aquello desde donde comienzo; pues allí volveré nuevamente», remite según todos los visos a la redondez y autoenvolvimiento de la verdad que declara, a la circularidad de su propio discurso sobre lo que es y no puede no ser; el texto, si nos situáramos en la perspectiva metodológica de la demostración, equivaldría a la confesión de un círculo vicioso o de algo que deberíamos tomar por una flagrante petición de principio.

Pero, justamente, son indicaciones como ésta las que pueden ayudarnos a comprender mejor la índole de la argumentación de Parménides en torno a algo tan aparentemente trivial como la tesis de que lo que es, es, y no puede no ser. Se trata, a mi juicio del intento de justificar una especie de truismo filosófico; la justificación, dentro de este contexto, se funda no en una presunta prueba deductiva, sino en la elucidación del truismo y en una explicitación de sus implicaciones críticas. Este modo de argüir en favor de una verdad que se supone palmaria, aunque haya pasado desapercibida, no deja de ser hasta cierto punto un rasgo característico del pensamiento filosófico.

Naturalmente, la importancia de —y el énfasis puesto sobre— la declaración de un truismo filosófico es tanto mayor cuando se trata de una verdad supuestamente crucial que se mantiene oculta o permanecía ignorada: entonces, su desvelamiento puede adquirir la dimensión de una revelación fundamental. Es el caso de la vía de la Verdad de Parménides. En definitiva, la clave del *Poema* de Parménides hay que buscarla en el descubrimiento de un truismo filosófico de este tipo. Y la argumentación pertinente no es en este caso una demostración sino una justificación analítica y elucidatoria, es decir: una explicación de su trascendencia y de sus implicaciones en el marco de discurso dado.

Los argumentos de Zenón, por su parte, adolecen de una informalidad análoga en lo que concierne a uso de nociones y de proposiciones contrapuestas. Su dialéctica, al menos en los testimonios disponibles, parece más defensiva que heurística —a pesar de que esos argumentos luego aprovecharon a otros innovadores como los atomistas—, y no deja de presentar un tinte relativista. Zenón da la impresión de responder a quienes oponen ideas más bien comunes a las especulaciones cosmológicas de Parménides. Su reacción dialéctica consiste en mostrar que las concepciones contrarias a la de Parménides entrañan, a pesar de las apariencias, consecuencias todavía más aporéticas o paradójicas que las inherentes a la unidad, auto-envolvimiento e inmutabilidad de lo que es (vid., por ejemplo, el testimonio de Platón en el *Parménides,* 128a-d). Esta argumentación *ad contrarium* estriba en reducciones a un absurdo material o conceptual, antes que lógico: desemboca en aporías, no en contradicciones. Zenón parece argüir en el sentido siguiente: la pluralidad y los cambios de lo que hay parecen evidencias de sentido común, y han sido asumidas como datos o supuestos básicos por diversas concepciones cosmogónicas; pero bajo su aparente plausibilidad, encierran paradojas inevitables, como la implicación de que lo que hay resulta a la vez indefinidamente pequeño e indefinidamente grande, o la implicación de que lo que se mueve permanece estático al estar ocupando siempre un espacio igual a sí mismo (29 B 1, 29 A 27). De ahí puede seguirse una conclusión relativista de este tenor: si la concepción parmenídea suena un tanto extraña, menos inteligibles aún son las opciones alternativas [16].

[16] Para no demorarme en un análisis de los argumentos de Zenón o, incluso, de Melisso, me remito a las observaciones de otros críticos como, por ejemplo, G.R.E.

Por lo demás, es notoria la contribución de Zenón al desarrollo inicial de la argumentación dialéctica, crítica o negativa, a partir de hipótesis: a partir de premisas de forma condicional, cuya no aceptabilidad se descubre a la luz de las aberrantes consecuencias que se siguen de ellas. También parece indudable la contribución de los eleatas, en general, a las ideas pragmáticas de implicación y de coherencia racional (ideas íntimamente relacionadas con el uso ordinario de la inferencia en un marco discursivo), al menos a través de una brillante utilización de lo que filosóficamente o comúnmente suele considerarse paradójico o absurdo. Pero la atribución de demostraciones (indirectas), y de una conciencia lógica o metodológica correspondiente, bien a Parménides, bien a Zenón, ya es en cambio una adjudicación harto dudosa. Menos justificada aún estaría la presunción de que ambos ejercieron una influencia crucial y decisiva en la constitución deductiva de las matemáticas, ni siquiera sobre el supuesto de una crisis radical de la matemática «empírica» de los antiguos pitagóricos. Tales suposiciones y las versiones que hablan no ya de una fundación, sino de una mediación externa (dialéctica o filosófica) que imprime un rumbo deductivo a la matemática griega, son las conjeturas que ahora toca discutir.

2.3

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables no se aviene con la concepción general del número como unidad (unidad no sólo del cálculo aritmético sino de la medición geométrica), que suele atribuirse a los antiguos pitagóricos. Este tropiezo puede instrumentarse en un tono dramático mayor, como una «crisis de fundamentos», o en un tono menor, como una crisis de crecimiento de la tradición matemática griega. La verdad es que el encuentro con los inconmensurables ha tenido desde antiguo el halo de las leyendas de transgresión. Algunos comentaristas helenísticos ya insistían en el escándalo provocado por este acontecimiento y se recreaban en las circunstancias que habían acompañado la violación de un secreto crucial para la secta pitagórica: los pitagóricos habían expulsado al

---

Lloyd (1966): *Polaridad y analogía*, pp. 104-108; G. Vlastos (1967): «Zeno of Elea»; G.E.L. Owen: «Zenon and the mathematicians», recogido en su (1986): *Logic, Science and Dialectic*, pp. 45-61.

sacrílego de la comunidad y lo habían dado por muerto construyéndole su propia tumba (Iámblico: *De Vita Pythag.*, xxxiv 246). Todavía hoy cunde la creencia en su trascendencia crítica, revolucionaria, para la suerte de la matemática griega; o más aún: para la historia de la matemática en general, pues representaría la primera crisis de fundamentos conocida. Sus secuelas incluirían el cambio de rumbo desde el cálculo aritmético hasta la métrica geométrica y la teoría general de las proporciones, amén de la ruptura con las pruebas intuitivas, empíricas, de los primeros pitagóricos y una nueva orientación hacia la demostración abstracta y el uso sistemático del método deductivo —en línea, se supone, con las directrices de la filosofía eleática—. La revolución habría sido no sólo teórica sino lógica y metodológica. ¿Qué más se puede pedir a una crisis de fundamentos? [17].

La cuestión es: ¿hay motivos para pensar en una crisis semejante?

La noción de «crisis de fundamentos» responde a una experiencia lógico-matemática de finales del s. XIX y principios del XX, cuya proyección como tópico historiográfico suele ser más retórica que descriptiva. Si queremos aplicar esta noción al hallazgo de los inconmensurables hemos de contar con algún criterio de la existencia del fenómeno antes de darlo por sentado e interpretar a su luz lo que ocurra a continuación como un haz de secuelas «revolucionarias». Un primer criterio puede ser el testimonio de los propios pacientes del trauma o, cuando menos, las alusiones de autores posteriores relativamente próximos y enterados. Un segundo criterio será efectivamente la repercusión crucial del acontecimiento tanto a los efectos negativos de un corte o ruptura de la tradición anterior como a los efectos positivos de un cambio radical de rumbo. Cuando no se den estas ~~éstas~~ condiciones mejor será no hablar de una crisis de fundamentos.

---

[17] Al parecer debemos a Tannery la conjetura de esta situación crítica. Pero hemos de agradecer a H. Hasse y H. Scholz (1928: «Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik», art. c.) su denominación propia y su conversión en una especie de tópico historiográfico. Contribuciones posteriores se han encargado de redondear este legado hasta lograr una *mise en scène* de notable calidad dramática, vid. por ejemplo J. Desanti: «Une crise de développement exemplaire: la "découverte" des nombres irrationnels», en J. Piaget, dir.: *Logique et connaissance scientifique*, París, Gallimard, 1969; pp. 439-64). Por desgracia para el drama y su ejemplaridad crítica, se funda en supuestos nada verosímiles, e.g.: la existencia de un atomismo numérico en el pitagorismo antiguo o la formulación parmenídea del principio de no contradicción.

Por lo que se refiere al primer signo, la conciencia del trauma, no hay indicios de que la matemática griega se viera a sí misma en una tesitura crucial en la segunda mitad del s. V a.n.e., ni hay testimonios próximos que revelen la existencia de una sensación de crisis entre los matemáticos de finales del s. V a.n.e. y principios del s. IV a.n.e. Autores como Hipócrates de Khíos, Teodoro de Kyrene, Arquitas de Tarento o Teeteto, que median entre el punto de origen, el descubrimiento de los inconmensurables, y un desenlace tan reconocido como la teoría general de la proporción atribuida a Eudoxo, no parecen muy afectados por la tragedia. Hipócrates, a juzgar por la reseña de Eudemo que nos ha legado Simplicio (*In Phys.* I 53-59), sigue utilizando en geometría una noción numérica de proporción y continúa sirviéndose de unos métodos gráficos para probar *[grápheïn]* sus resultados; ni el mismo Teodoro, cuyo rigor demostrativo es encomiado por Platón, renuncia a ellos (a tenor del *Teeteto*, 147d), «probó diagramáticamente algo sobre las potencias al cuadrado *[perì dynameón ti égraphe]*»; Arquitas, según Diógenes Laercio (*Vitae Philos.* VIII 83), aplica un movimiento funcional *[kínesin organikén]* al diagrama geométrico *[diagrámmati geometricô]* para buscar la solución de algunos problemas, procedimientos que se sitúan casi en el extremo opuesto a la abstracción antiempírica que supuestamente conlleva la conciencia del desastre pitagórico. Puede que sea Teeteto el que da muestras más claras de un interés abstracto y sistemático en la investigación de las variedades y tipos de inconmensurables, pero se ve a sí mismo como continuador de una línea anterior de trabajo. Tampoco hay referencias a la crisis en gente tan bien relacionada e informada como Platón o Aristóteles. Platón da fe de que los geómetras de su tiempo no han abandonado aún los viejos hábitos: acuden a construcciones gráficas y mecánicas en la solución de problemas, emplean barbarismos empíricos y prácticos para informar de su trabajo («cuadrar», «aplicar», «añadir», y otros por el estilo, vid. *República,* 527a), en vez de reconocer que su auténtica labor **debería** ser la contemplación intelectual de unos objetos ideales, fijos e inmutables. Aristóteles todavía es más explícito: da a entender no sólo que la matemática coetánea no ha pasado por el trance de alguna paradoja fundamental interna, sino que tampoco parece inquietarse por las paradojas cosmológicas de Zenón ni, en particular, por las envueltas en la idea de magnitud extensa; los matemáticos, asegura Aristóteles, no necesitan ni emplean la idea de infinito; únicamente postulan la existencia de líneas finitas del tama-

ño que se quiera y la posibilidad de seccionar un segmento menor (*Phys.* III 7, 207b27-34). La opinión aristotélica de que los geómetras no necesitan ni emplean la idea de infinito no es muy certera, pero como diagnóstico de la situación no es un juicio enteramente infundado. Los *Elementos* de Euclides, por ejemplo, únicamente harán referencia al infinito en el contexto de la teoría de las paralelas y sólo en el sentido de que los segmentos dados pueden prolongarse indefinidamente *[eis ápeiron]*; no aluden al infinito en los lugares que podrían considerarse más sensibles a las paradojas de Zenón, e.g. en las aplicaciones del «método de exhausción» (en X 1, en el libro XII). Lo cierto, en cualquier caso, es que Aristóteles parece convencido de que esas aporías tienen si acaso repercusiones físicas o cosmológicas, pero no matemáticas.

Bien, no se cumple la primera condición de una crisis de fundamentos. Sin embargo, el tropiezo con magnitudes inconmensurables podría haber puesto en cuestión la proyección geométrica del cálculo aritmético y la idea genérica de que medir no es sino una manera de contar. Contar es calcular una cantidad con números enteros que valen exactamente tantas veces la unidad o con fracciones alícuotas de números enteros. Medir —cabe suponer— equivale a contar el número exacto de veces que una sección tomada como unidad está contenida en la magnitud geométrica dada. Algunas aplicaciones abonarían esta presunción; recordemos, por ejemplo, la versión de los números proporcionales de las tres consonancias más importantes —octava, 12:6 (2:1); quinta, 12:8 (3:2); y cuarta, 12:9 (4:3)— en términos de razones entre longitudes. Pues bien, la existencia de longitudes no conmensurables daría al traste con una generalización ingenua de estos resultados. No sabemos si, de hecho, los pitagóricos habían incurrido en tal generalización. En cualquier caso, no es fácil conciliar el descubrimiento con una suposición capital de la numerología pitagórica: la estructura aritméticamente inteligible de la realidad. Aun así, no parece haberse producido un corte o una paralización de la tradición pitagórica. Hipócrates, como ya he indicado, mantiene una noción numérica de proporción. El procedimiento *anthyphairético* de cálculo también conserva una considerable operatividad pese a moverse en un contexto de conceptualización de la razón proporcional que podríamos calificar como una «teoría de transición» elaborada a raíz del trato con los inconmensurables; Aristóteles recoge en *los Tópicos* (VIII 3, 158b29-30) un criterio significativo en este respecto: las magnitudes que tienen una misma

«reducción» [«*antanaíresis*», sinónimo aristotélico de «*anthyphaíresis*»] guardan entre sí la misma razón. Por ejemplo, las razones 3:2, 9:6, 12:8, son iguales entre sí conforme a este criterio. Esta referencia da a entender la relación del método anthyphairético con la investigación de una noción de proporción más comprensiva que algunos matemáticos griegos se plantean al tiempo que van reconociendo diversas clases de conmensurabilidad e inconmensurabilidad (la que se da con respecto a la longitud y la que se da con respecto al cuadrado; por ejemplo, la diagonal y el lado del cuadrado no son conmensurables en longitud, *mékei,* pero lo son potencialmente, *dynámei,* es decir: después de formar sus cuadrados; en general, de la inconmensurabilidad en longitud no se sigue la inconmensurabilidad en cuadrado, ni por ende de la conmensurabilidad en cuadrado se sigue la conmensurabilidad en longitud, pero valen las implicaciones conversas). En estas contribuciones, anteriores a la teoría más general de las proporciones de Eudoxo, se puede ver la mano de geómetras como Teodoro de Kyrene y Teeteto (Platón: *Teeteto*, 148a-b; vid. infra, c. 4, §1,3). Por lo demás, la tradición métrica numérica no desaparece de la escena matemática griega y no faltarán autores helenísticos que reanuden esta tradición como, por ejemplo, Herón de Alejandría.

En consecuencia, tampoco parecen concurrir las circunstancias de un corte radical con la matemática anterior o de una paralización de sus vías heurísticas. En realidad, la experiencia de la inconmensurabilidad no fue una experiencia traumática negativa sino más bien una experiencia estimulante y positiva. Por un lado, quedaba al principio la esperanza de que las magnitudes inconmensurables resultaran conmensurables potencialmente, con respecto a sus cuadrados —una actitud parecida todavía se deja sentir en una disertación de tono platónico (tal vez de Jenócrates) que se ha conservado junto con su réplica peripatética *De lineis insecabilibus*—. Por otro lado, las verdades secuelas de la «crisis» fueron el desarrollo de la investigación de los casos y tipos de inconmensurabilidad (e.g. por parte de Teodoro y Teeteto), y el aumento de la precisión conceptual (e.g., en torno a la noción de conmensurabilidad en cuanto a la potencia, en torno al sentido de la *anthyphaíresis*), hasta desembocar en contribuciones a la teoría de las proporciones, en particular la de Teeteto (quizás recogida en el tratamiento geométrico de la aritmética del libro VII de los *Elementos* y fundada en una concepción «anthyphairética» de la proporción como la expuesta en X 1) y, sobre todo,

la de Eudoxo, responsable quizás de unos criterios semejantes a los formulados por Euclides en las definiciones 3-5 del libro V de los *Elementos*. Si es cierta esta atribución a Eudoxo, respaldada por diversas fuentes (Aristóteles, Arquímedes, el escolista anónimo del libro V de los *Elementos*), su teoría viene a descansar en un concepto de proporción que soslaya la referencia pitagórica a una unidad prefijada y salva la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las longitudes, áreas o volúmenes en cuestión. La teoría, con la madurez que presenta en Euclides, supone que las magnitudes consideradas son objetos homogéneos que constituyen un sistema ordenado conforme a la definición de las proporciones en términos de equimúltiplos (*Elementos*, V, def. 5). En esta perspectiva, las cuestiones pertinentes no son del tenor de «¿Cuál es el área de un círculo (o el volumen de una esfera)», sino del tenor de «¿Qué razón guardan entre sí las áreas de dos círculos (o los volúmenes de dos esferas)»?; y desde luego las respuestas oportunas no serán números, sino proporciones, i.e. «la misma razón que existe entre los cuadrados (o los cubos) de sus radios». Del desarrollo inicial de la teoría ya podemos hallar testimonios expresos en Aristóteles. En el pasaje de *Top*. VIII, 158b28-35, antes citado, se hace eco de la noción anthyphairética de razón que Teeteto había popularizado en el ámbito de la Academia platónica: unas magnitudes están en la misma razón, son proporcionales, si tienen la misma anthyphaíresis; en la *Física*, 206b6 ss., discute este criteerio y las relaciones entre equimúltiplos introducidas por Eudoxo; en los *Segundos Analíticos* I 5, 74a17, compara ambas propuestas desde el punto de vista de la generalidad de sus aplicaciones y reconoce la superioridad de la condición de homogeneidad de la nueva concepción eudoxiana: tiene, como dice Aristóteles, la ventaja de aplicarse uniformemente a los números, las longitudes, los cuerpos sólidos, los tiempos, aunque todos ellos sean tipos distintos de objetos. Es natural que, a este grado de abstracción y de generalidad teórica, haya de acompañarle una forma más estricta de deducción y tal vez incluso la previsión de una reorganización deductiva; en todo caso, la conexión entre la investigación de los inconmensurables y el creciente rigor deductivo ya se deja entrever en las referencias platónicas del *Teeteto* al programa de trabajo de Teodoro y del propio Teeteto.

Así pues, retrospectivamente, podemos considerar el punto de la inconmensurabilidad y la búsqueda de una nueva geometría proporcional como una «crisis de crecimiento» o una demanda interna de

desarrollo; pero no como un trance singularmente traumático para los matemáticos griegos; y menos aún como la primera crisis de —unos inexistentes— fundamentos. Algo parecido cabría pensar de otros flecos del «trauma», como los asociados al punto de la continuidad y la división dicotómica de la extensión: por ejemplo, no es el deseo de responder a algún desafío eleático, sino el desarrollo de las técnicas geométricas de bisección el que parece conducir a la asunción o a la prueba de principios de «exhausción» como el teorema X 1 de los *Elementos* (dadas dos magnitudes desiguales cualesquiera, si de la mayor se sustrae una parte mayor o igual que la mitad, y del resto otra parte mayor o igual que su mitad, y así sucesivamente, resultará una magnitud menor que la más pequeña de las magnitudes dadas) [18].

¿Qué podemos pensar entonces de una mediación filosófica, eleática o platónica, que endereza o dirige el rumbo de la geometría griega a raíz del presunto marasmo?

Para empezar, se trata de una conjetura avanzada sobre la base de otra conjetura que resulta infundada como hemos visto. En segundo lugar, no hay datos que avalen la relación de los eleatas con el desarrollo de las matemáticas. Y por lo que concierne a una reforma platónica de la matemática, orientándola hacia la geometría deductiva a raíz de los límites operativos de la aritmética pitagórica, la fortuna de esta hipótesis aún es más efímera que la de la anterior [19]. La verdad es que la orientación geométrica venía de mucho antes, habida cuenta de que los métodos de transformación y de aplicación de áreas son un viejo legado pitagórico; por lo demás, sólo se consuma a partir de los *Elementos* de Euclides. En tercer lugar, el punto de la inconmensurabilidad y su asociación con cuestiones como las del infinito y el continuo bien pudieron tener una

---

[18] Vid. W.R. Knorr (1982): «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», art. c., pp. 123 ss. en especial.

[19] La presunción de una reforma platónica que induce a la matemática griega a pasar del empirismo aritmético de los pitagóricos a la deducción geométrica fue ante todo un tópico del primer tercio del siglo (e.g., H.G. Zeuthen: «Sur les connaissances géometriques des Grecs avant la réforme platonicienne», *Oversigt det kgl. Danks* Vindenskabernes Selskabs Forhandlingeer, 6 (1913), pp. 431-473; O. Tõplitz; «Mathematik und Antike», *Die Antike*, 1 (1925), pp. 175-203); O. Becker: *Mathematische Existenz,* Halle, 1927; p. 250 especialm. En el propio Szabó (1969): *The Beginnings...*, edic. c., § 3.30, ii pp. 322 ss., puede encontrarse una revisión crítica pertinente.

repercusión crítica en cosmología, a través de las aporías eleáticas, sin representar un asunto crucial en geometría. Recordemos que Aristóteles previene de un uso o una aplicación falaz de las paradojas de Zenón en el contexto de la prueba de la inconmensurabilidad (*APr.* II 17, 65b16-21); él mismo es quien da cuenta de que la matemática coetánea no parece inquietarse por las paradojas cosmológicas de Zenón ni por las envueltas en la idea de magnitud extensa. Será, en cambio, la filosofía natural la que venga a servirse del desarrollo de la geometría para abordar algunas de esas aporías [20]. En suma, cabe apreciar el influjo de las tesis eleáticas sobre la cosmología posterior (a cuenta de las aporías acerca de lo Uno y lo Múltiple o en torno a la realidad física del movimiento), y seguramente su influencia se conjugó con el punto de la inconmensurabilidad para dar lugar luego a ciertos pluralismos y atomismos críticos; esta discusión cosmológica viene a desembocar en el análisis aristotélico de la noción de cambio y movimiento, y en su idealización del punto y del instante. Es indudable asimismo la repercusión de la dialéctica elática en las incipientes disquisiciones erísticas acerca de lo que «es» y «no es» o

---

[20] Consideremos e.g. los ataques de Zenón contra el movimiento sobre la base de que su consumación envuelve distancias indefinidamente divisibles que se habrían de cubrir en períodos finitos de tiempo. No representa una dificultad de orden matemático (es decir: no es vista como una cuestión que estriba en considerar una magnitud determinada como una suma compuesta por una serie ilimitada de fracciones), sino un problema de carácter físico. La dificultad, según muestra Aristóteles en la *Física* VI 2, proviene de considerar la realización efectiva de un conjunto infinito de pasos en un margen finito de tiempo. Sin embargo, Aristóteles no duda en aplicar a la aporía física, al caso particular en el que cubrir una distancia finita implicaría emplear un tiempo infinito, un argumento de corte matemático (*Phys.* VI 2, 233a32-b15). Asume una noción de movimiento uniforme que también figura en el prefacio del tratado sobre la esfera de Autólico: se da este tipo de movimiento cuando la misma extensión es cubierta siempre en el mismo tiempo (*Phys.* VI 2, 233b5). De este supuesto se sigue que en un movimiento uniforme las distancias cubiertas son proporcionales a los tiempos. Sean D una distancia física dada y T un tiempo finito, empleado en atravesar D con un movimiento uniforme; sea D^* la distancia propuesta en la aporía y T^* el tiempo necesario para cubrir D^* con este mismo tipo de movimiento. Pues bien, si D es cubierta en T con un movimiento uniforme, entonces la proporción $T^*:T :: D^*:D$ establece que el tiempo T^* requerido para cubrir D^* será un tiempo igualmente finito; por lo tanto, no se da la infinitud que aparentemente envuelve la aporía. Así pues, las aporías físicas, lejos de reflejar una antinomia previa en las matemáticas, acuden a éstas en busca de ayuda para una solución de sus propios problemas.

sobre la atribución de verdad y falsedad a los enunciados (e.g. en los llamados *Díssoi Lógoi*). Ahora bien, en todo cuanto concierne a las matemáticas, sólo estamos autorizados a suponer que las tesis eleáticas y las paradojas de Zenón hallan eco a lo sumo en la filosofía de la matemática. Por ejemplo: en la índole puramente conceptual que Platón asigna al número, *Rep.* VII, 526a; en el carácter abstracto de los objetos matemáticos, que se pueden concebir separadamente de la materia y del movimiento, según piensa Aristóteles (*De Coelo*, 299a15-6; *Phys.*, 193b22-194a15); en su propia distinción entre el infinito real, actual, y el infinito virtual o potencial (*Phys.*, 206a9-b27). Pero media un buen salto entre reconocer esto (el influjo de las aporías eleáticas sobre la filosofía natural y sobre la filosofía de la matemática de Platón o de Aristóteles), y asegurar que, de hecho, la filosofía y la dialéctica eleáticas ejercieron una influencia directa o decisiva sobre la conformación o el rumbo metódicos que va adoptando a lo largo del s. IV a.n.e. la matemática griega. (En general, no parece que ni antes ni después del s. IV a.n.e. o, para el caso, ni antes ni después del deuteroeleatismo de Platón, la filosofía haya decidido el curso de la matemática griega.)

Por contra, sí hay indicios de que la cuestión de la inconmensurabilidad movió a un desarrollo teórico y a una rigorización metódica de la matemática griega, como ya he indicado. Y en esta perspectiva podemos contemplarla como desencadenante de una demanda interna de desarrollo matemático en el curso de la primera mitad del s. IV a.n.e., a la que responde la primera teoría matemática general: la teoría de las proporciones de Eudoxo. Con este factor interno vino a coincidir en el seno de la Academia platónica otra demanda externa de raíces filosóficas y dialécticas: la petición de un discurso racional, coherente y ordenado sobre cualquier ámbito de conocimiento propiamente dicho, petición justamente refrendada por las muestras de rigor que empezaban a dar los matemáticos. Los *Analíticos* aristotélicos son por ejemplo, una cumplida muestra de esta confluencia.

3. *La formación de la idea de demostración.*

Creo que no hay una respuesta simple y lineal a la cuestión de la génesis de la idea de demostración. Todo hace pensar que la generación de las ideas de demostración y de método deductivo fue

un proceso gradual y promiscuo, y que su desarrollo bien pudo alimentarse de diversas fuentes como la filosofía, la dialéctica y las matemáticas. La compleja constitución de estas ideas (su índole reflexiva; sus dimensiones discursiva y lógica, epistemológica y metodológica; sus virtudes cognoscitivas y su capacidad de organización de cuerpos de conocimiento), sugiere que abandonemos los enfoques unilaterales y consideremos las posibles contribuciones de cada una de las fuentes señaladas si queremos comprender un largo y laborioso proceso de alumbramiento.

3.1

Conocemos, en primer lugar, una larga tradición filosófica de los ss. VI y V a.n.e.: por un lado, la discusión y confrontación crítica de ideas cosmológicas entre los jonios, en su búsqueda de una explicación genética y unitaria del mundo natural; por otro lado, el grado de generalización conceptual alcanzado por los pitagóricos en su interpretación de la armonía del *kósmos* y, más aún, por los eleatas en su intento de establecer la estructura inteligible de la realidad por debajo de sus manifestaciones múltiples, dispares o paradójicas. En Parménides se ha querido ver la irrupción del pensamiento racional, la instauración del discurso de la razón inmanente al *lógos*, pero su contribución no sólo es más sutil sino más ambigua [21]. Anuncia la autorregulación autónoma del pensamiento frente a las veleidades e inconsistencias de las manifestaciones ordinarias de las cosas; pone en movimiento una dinámica analítica interna de los sentidos de *estì*, es, como expresión abstracta. Pero no renuncia a los dones de la revelación y la iluminación, ni transforma la visión anterior del mundo como entramado de coerciones y obligaciones en un sistema de causas y necesidades naturales. Heráclito, que asume la complejidad y variedad del mundo para proclamarla encerrada en leyes y sujeta al lógos, tampoco deshace toda ambigüedad. Quizás sea Demócrito el llamado a dar su justo valor a la investigación de las

[21] Según se desprende no sólo del texto mismo del *Poema*, sino de otras circunstancias externas como la condición de *ouliádes*, miembro de un linaje vinculado al culto de Apolo, que algunas inscripciones atribuyen a Parménides. (Apolo, según una persistente tradición, es el dios que «es» y «es uno». Sobre la significación de este punto, vid. M. Vegetti (1979), o.c., pp. 80-7.)

condiciones materiales del comportamiento regular del mundo natural y a estudiar en una perspectiva desacralizada las relaciones entre el azar y la necesidad. Esta perspectiva es una de las condiciones que permitirán pensar en opciones metódicas de prueba y de explicación. Pero, por otra parte, sobre la base de esta rica tradición también podemos entender la apertura de lo que llamaríamos un «horizonte epistemológico» y su exploración ulterior, en el s. IV a.n.e., es decir: el esfuerzo deliberado por comprender la naturaleza del pensamiento y sus modos de conceptualización y teorización [22]. En todo caso, la disociación crítica de Parménides entre lo genuinamente real (pensable, expresable) y lo meramente ilusorio o aparente, hace casi inevitable la incorporación de motivos epistemológicos a una toma de posición filosófica sobre la realidad. Pues bien, por lo que concierne a la idea de demostración, la apertura de este horizonte epistemológico y la discusión de las relaciones entre la sensación y el conocimiento no sólo contribuyen a marcar un nivel de abstracción conveniente; además constituyen una de las condiciones que hacen posible la opción por un método «no empírico» de inferencia y de prueba, abren la alternativa de un mostrar o hacer saber que algo es el caso por obra y gracia de la sola razón.

3.2

Ligada a estas tradiciones filosóficas se va desarrollando otra actitud o disposición de «segundo orden»: la de servirse del discurso argumentado y del escrutinio racional para dirimir causas intelectuales, conflictos entre opiniones y propuestas. Esta actitud, a veces obligada por la generalidad de unas especulaciones que sólo podían guardar con la observación y con la experiencia una relación indi-

[22] Puede ser instructivo, por ejemplo, seguir la acuñación filosófica de términos como «*noeîn*» («pensar») y «*noûs*» («inteligencia»), vid. W.K.G. Guthrie (1965), *edic.c.*, II, pp. 32-33, 282-9. Por otro lado, cabe recordar la relación entre las concepciones filosóficas y los estilos de pensamiento o métodos de investigación que Aristóteles detecta en sus predecesores. Recordemos, por ejemplo, su distinción entre el método «físico» de definición y explicación de Demócrito y el método «lógico», discursivo, de quienes buscan definiciones esenciales —como Sócrates en el ámbito de las virtudes morales (*Metaphys.* M 4, 1078b17-29)— o de quienes se atienen a principios más bien especulativos —como los que arguyen que hay magnitudes indivisibles en razón de la unidad de la idea de triángulo en sí mismo (*De gen. et corrup.*, I 2, 316a5-14)—.

recta (e.g. en cosmología, en teoría médica), aprovecha la eficacia crítica de la argumentación condicional, en especial cuando se aplica a un marco discursivo atravesado por nociones y proposiciones de oposición. Las polarizaciones y las oposiciones no sólo eran modos tradicionales de describir, encuadrar y conceptuar la realidad [23]. También sugieren estrategias dialécticas de confrontación entre concepciones opuestas; son los eleatas quienes advierten antes y mejor la eficacia crítica del discurso de la contraposición y empiezan a practicar diversas tácticas de refutación o de exclusión en este sentido. Por ejemplo: la táctica de *forzar una disyuntiva* entre extremos contrapuestos de manera que resulte insostenible uno de ellos («lo que no es», «lo múltiple») y parezca obligado el otro («lo que es», «lo uno»), como ya hemos visto hacer a Parménides; la de *refutar una proposición* mostrando que de ella se siguen consecuencias opuestas o aporías irreconciliables (según Zenón: «... si existe lo múltiple, es necesario que sea pequeño y grande; pequeño de modo tal que no tenga magnitud, grande de modo tal que ésta sea infinita», 29 B 1); la de *asegurar una tesis* por medio de la refutación de la tesis contraria (así aboga Melisso en favor de la condición no generada y eterna de lo real: «Siempre era lo que era y siempre será. Si, en efecto, se hubiese generado, habría sido necesario que antes de generarse fuera nada; pero si era nada, de ningún modo podría haberse generado algo a partir de nada», 30 B 1). Como ya sabemos, en este contexto dialéctico aparece la noción informal de la reducción al absurdo —quizás el primer significado metódico del término «dialéctica *[dialektiké]*» sea el tipo de argumentación que responde al propósito de la reducción al absurdo en filosofía pues, probablemente, es en tal sentido en el que Aristóteles (frag. 65) atribuye a Zenón la invención de la dialéctica—.

Pero, por otro lado, esa misma actitud señalada al principio tiene virtudes heurísticas y fomenta la investigación de las formas y posibilidades del lenguaje discursivo. Su desarrollo propicia una consideración relativamente autónoma y directa del lenguaje: la naturaleza misma del lenguaje deviene un objeto de investigación; los *lógoi*, las expresiones lingüísticas con sentido, están dotados de una especie de consistencia discursiva propia, son capaces de llevar y traer, atrapar y liberar el pensamiento, hasta alumbrarle al fin la vía del cono-

[23] Vid. G. Lloyd (1969), o.c.; Primera Parte: «Polaridad», pp. 23-162.

cimiento. Por ende, si hay que reconstruir o depurar el lenguaje disponible —en la línea del conocimiento y de la verdad—, habrá que hacerlo a través de él, experimentando con él y trabajando en él. Buena parte de la labor filosófica de Platón, sin ser precisamente lingüística, consiste en la elaboración de un lenguaje filosóficamente hábil e inteligente. Más aún, la utilización que hace Platón de los interlocutores de algunos diálogos —desde el propio Sócrates hasta los sofistas o el ingenuo siervo de Menón— parece dirigirse a este objetivo (entre otros): el de mostrar cómo un lenguaje discursivo puede ir por delante de la mente de sus usuarios y hacerles reconocer que no sabían lo que creían saber o que sabían cosas que al principio no se habrían imaginado. El desarrollo de la dialéctica llegará incluso a convertir este lenguaje discursivo en un medio ordinario de investigación filosófica y científica: en un **medio** en el sentido ya usual de instrumento heurístico y crítico, pero también en un **medio** en el sentido más peculiar de hábitat o lugar natural de la investigación misma. De ambas funciones se benefician la mayéutica de Sócrates y la propia dialéctica platónica —si Platón atribuye a Sócrates el investigar las cosas «en toîs lógois» (*Fedón* 100a), Aristóteles asigna a Platón este mismo proceder y en los mismos términos, *Metaphys.* A 6, 987b31-32)—; en fin, el mismo Aristóteles encarece esas dos funciones del lenguaje discursivo (*Top.* I 2, 101a35-b4), y las pone en práctica como un punto de partida natural no sólo de la elucidación filosófica (e.g. en el libro VII de la *Etica Nicomáquea*) sino también de la investigación sustantiva (e.g. en el libro I de la *Física*). Por lo demás, la dialéctica no sólo fue la base práctica sobre la que se erigió la teoría de la argumentación fundada por Aristóteles en los *Tópicos* (vid. la declaración final del apéndice *Sobre las refutaciones sofísticas,* 183b34-184b3); también tuvo que ver con la teoría de la demostración científica de los *Analíticos,* como luego habrá ocasión de comprobar. De hecho aporta a la idea de demostración un rasgo típico: demostrar es una manera de explicar algo a alguien y hacerle saber de forma incontestable que tal es el caso.

3.3

Como ya hemos visto, otras contribuciones básicas a la promoción de la idea de demostración son de raíz matemática. Hay indicios de una tradición matemática que venía madurando unos proce-

dimientos de «análisis» en su trato con ciertos problemas. Tal vez al principio este análisis geométrico se centrara en las condiciones de una solución posible para esos problemas o procurara determinar los supuestos de los que cabría derivarse la solución una vez que están —o se suponen— resueltos; pero pronto pasó, quizás de modo natural, a investigar igualmente la verdad de ciertas proposiciones y la prueba deductiva de algunos teoremas. Es posible además que su confluencia con unas primicias de organización deductiva, como las que ofrecerían los primeros tratados de *Elementos,* abriera una perspectiva aún más general: en ella se seleccionan unos cuantos problemas o teoremas y se organizan en secuencias deductivas a partir de ciertos supuestos o de otros resultados conocidos, ya sea con el fin de incorporar nuevos resultados a este núcleo de conocimientos, ya sea con el fin de descartar otras proposiciones como resultados inviables de suyo o incompatibles con aquellos principios o resultados previamente asumidos. Un proceder análogo es el seguido por Hipócrates de Khíos en la resolución de un problema de cuadratura de lúnulas (y precisamente a él se remonta la confección de los primeros *Elementos,* ya mediado el s. V a.n.e.). En todo caso, esta tradición va conformando un «método de hipótesis» como el recomendado a veces por Platón [24].

Por otra parte, ya conocemos la existencia de otra línea de investigación que también facilitaba el empleo de la deducción condicional, aunque en este caso a efectos esencialmente críticos o reductivos: se trata de la investigación de inconmensurables. Seguramente, la racionalización del primer encuentro con una magnitud inconmensurable llevó su tiempo. El tropiezo con este resultado no fue, según todos los visos, el fruto de una conciencia lógica previa que aplica unos principios —en particular, la no contradicción— a la obtención deliberada de una reducción al absurdo; parece responder más bien a un proceso de contrastación crítica que al fin arroja una prueba definitiva, una prueba concluyente de imposibilidad, gracias

[24] E.g.: *Menón,* 86e-87b; *Fedón,* 100a, 101d; *Teeteto,* 154e. (Cfr. sin embargo *República* VI, 511b-d, donde critica este método por no seguir el vuelo de la dialéctica filosófica hacia un principio supremo). No faltan en Aristóteles referencias análogas al análisis geométrico, e.g.: *Refut. sof.,* 175a23-30; *Etica Nic.,* 1112b20-25; hay incluso observaciones de carácter lógico sobre este procedimiento, en particular cuando se aplica a la búsqueda de las premisas pertinentes para probar una proposición antes de saber si ésta es en efecto verdadera o falsa, vid. *APo.* I 12, 78a7-13 (y nota 32, infra).

a la nitidez de las nociones en juego y al hecho de que los atributos par e impar resultan clara y efectivamente contradictorios. Ahora bien, según dan a entender algunas referencias del *Teeteto* de Platón a la labor de Teodoro (vid. 147d-148b), el estudio de los inconmensurables fue tomando un aire relativamente sistemático en la segunda mitad del s. V a.n.e. y los resultados atribuidos a Teodoro sólo pudieron establecerse por un tipo de prueba un tanto singular en el marco de la matemática anterior. Estos resultados no nacen de eventuales fracasos en diversos intentos de conmensuración numérica —digamos— de ciertas magnitudes lineales o de sus cuadrados; son casos de inconmensurabilidad y se han de establecer por medios conceptuales e inferenciales distintos de los que llevarían a la mera comprobación de un error de cálculo o a una aproximación indefinida al valor buscado. (En general, no dar con la solución de un problema o desconocer si el problema tiene solución en unos determinados términos, es algo muy distinto a establecer que la solución es lógicamente imposible en los términos dados.) Entonces cabe sospechar que esta investigación sostenida de los inconmensurables no sólo propició el uso de unas pruebas concluyentes, de la reducción al absurdo en particular, sino que probablemente permitió además hacerse una idea de la fuerza y del alcance de las pruebas de este tipo. No es extraño que esta línea de investigación, tras las contribuciones de Teodoro y de Teeteto, viniera a desembocar en la teoría de las proporciones de Eudoxo, quizás la primera teoría matemática general, casi diríamos «estructural», de que tenemos noticia —así se desprende de Aristóteles (*Apo* I 5, 74a17-25; 2 7, 99a9-11) y de los scholia del libro V de los *Elementos* que, al atribuir la teoría a Eudoxo, glosan la generalidad de sus resultados aplicables a todo tipo de magnitud y a cualquier rama matemática: música, aritmética, geometría...

Lo cierto es que en la primera mitad del s. IV a.n.e. hay clara constancia de las dos aportaciones sustanciales que acabo de reseñar: 1ª) Del uso heurístico de la deducción condicional en geometría, en el contexto de un peculiar método de hipótesis donde cabe entender por «hipótesis» una proposición que sirve como supuesto o condición para obtener alguna conclusión positiva o negativa sobre la cuestión planteada. En el *Menón*, por ejemplo, Platón sugiere iniciar una investigación —en torno a si la virtud es algo que se puede enseñar y cómo— «a partir de una hipótesis. Y digo «a partir de una hipótesis» tal como hacen con frecuencia los geómetras al in-

vestigar cuando alguien les pregunta, supongamos, a propósito de una superficie, si, por ejemplo, es posible inscribir como un triángulo esta superficie en este círculo. Ellos contestarían así: «Aún no sé si es posible, pero, como una hipótesis creo que puede ser de utilidad para el caso lo siguiente: si esta superficie es tal que..., me parece que se ha de seguir un resultado y si, por el contrario, es imposible que ello suceda, entonces se ha de seguir tal otro» (86e-87a). **2ª**) Del rigor y de la necesidad que acompañan a la demostración geométrica, o matemática en general, hasta el punto de que ésta oficia como término cabal de contraste con la argumentación meramente plausible o verosímil (e.g. Platón: *Teeteto,* 162e4-7; *Timeo,* 51e; Aristóteles: *Etica Nicomáquea,* I 3, 1094b25-26).

3.4

En resumen: las tres líneas señaladas —filosófica, dialéctica y matemática— van configurando tres presupuestos importantes de las ideas de demostración y de método deductivo, a saber: 1) una perspectiva epistemológica sobre las construcciones y los objetos intelectuales, así como una conciencia de su índole intencional y de su capacidad explicativa; 2) el interés en conocer las formas y dominar las posibilidades del lenguaje discursivo; 3) un esfuerzo por lograr pruebas deductivas y por organizar el conocimiento disponible —al menos dentro de ciertos ámbitos— de un modo coherente y más o menos sistemático.

No tiene mucho sentido ahora preguntarse si una de esas líneas en particular podría haber engendrado todo este complejo ideológico. De hecho, las tres conviven y se comunican en el círculo intelectual de la Academia platónica durante algunas décadas del s. IV a.n.e., entre los años 380 y 350 a.n.e. aproximadamente.

Pues bien, éste sería —de haber alguno— «el **lugar** y el **momento**» de la constitución efectiva de las ideas griegas de demostración y método deductivo. Por lo menos, sólo allí y entonces podemos documentar tanto la connivencia de esas tres fuentes de inspiración y desarrollo (filosófica, dialéctica, matemática), como la presencia al fin inequívoca de estas ideas.

Supongo que no estará de más alguna indicación sobre este último extremo.

Conocemos por el mismo Aristóteles la existencia de discusiones

en torno a la demostración y otras nociones conexas, dentro de la Academia o entre gente relacionada con ella. Había, de una parte, ciertas confusiones sobre la división platónica, la definición y la demostración; confusiones que Aristóteles viene a desvanecer (e.g. *APr.* I 31, 46a31-37; *APo.* II 5, 91b18 ss.), al menos en teoría. El entusiasmo de algunos aprendices de la dialéctica de Platón por la división dicotómica les había llevado a pensar que el verdadero objetivo del conocimiento es el acoso y la delimitación del concepto real de algo, su definición, y que los métodos a este respecto (e.g.: el practicado por Platón en el *Sofista* o en el *Político*) deparan de suyo conocimientos demostrados. Aristóteles muestra: que la delimitación o división sólo alcanzan a ser tareas preliminares en la elaboración del concepto; que la definición y la demostración son operaciones metódicas independientes en principio (una definición no demuestra ni es demostrable en sentido propio, aunque una demostración sí pueda establecer la naturaleza esencial o causal de su objeto); que el desarrollo del conocimiento científico no se cifra tanto en la captación de esencias conceptuales como en la demostración y explicación causal de las propiedades inherentes a todo cuanto caiga bajo un género natural determinado. Concurrían, de otra parte, ciertos equívocos acerca de la idea misma de demostración que Aristóteles también se cree obligado a despejar. A tenor de *APo.* I 3, 72b 55 ss., alguno de sus contemporáneos (se atribuye con poco fundamento esta opinión a Antístenes) pensaba que la demostración es imposible por envolver una regresión infinita: si la verdad de la conclusión se demuestra sobre la base de la verdad de las premisas, esta verdad habrá de establecerse en razón de unas proposiciones previas que a su vez precisarían demostrarse a partir de otras, y así sucesivamente *ad infinitum;* otros (tal vez Menaekhmo y algunos seguidores de Jenócrates) se remitían a una especie de proceso circular. Ninguno de ellos advierte que la demostración efectiva de una proposición ha de descansar en última instancia sobre ciertos supuestos o principios indemostrables.

Hay además, dentro del mismo círculo académico, otras contribuciones de Platón y de Aristóteles muy significativas. Por esta época Platón parece cobrar plena confianza en la dialéctica —aunque no llegue a estar claro qué entiende en definitiva por tan encarecido método filosófico—: es entonces cuando explora las posibilidades de la deducción condicional de consecuencias compatibles o incompatibles con los supuestos asumidos (e.g. *Rep.* IV 437a; *Teeteto,* 154e;

162e-164b), recomienda el descenso a partir de un supuesto fuerte o el ascenso hasta un principio superior (*Fedón*, 100a, 101d), y apunta algo así como una organización deductiva del conocimiento (*Rep.* VI 511a-d); en suma, esboza un método parecido al del análisis geométrico bien que sublimado a la esfera de sus ideales filosóficos. También es durante los últimos años de su estancia en la Academia, en torno a 350 a.n.e., cuando al parecer Aristóteles concibe y comienza a diseñar la teoría de la demostración científica, propuesta en los *Segundos Analíticos*. Esta concepción apodíctica del saber científico subyace de algún modo en algunos ensayos filosóficos de esta misma época (e.g. en la *Etica Nicomáquea*); y su núcleo deductivo, «silogístico» en un sentido todavía genérico de este término, despunta en otras obras coetáneas (e.g. en los *Tópicos*). Luego (c. II, § 1.1) consideraremos el oscuro asunto de la composición de los *Analíticos*. Adelanto que me parece razonable conjeturar que ciertas bases conceptuales de la teoría aristotélica de la demostración proceden de esta época, —aun concediendo que su reelaboración lógica y sistemática, «silogística», en sentido técnico, es posiblemente posterior—. Creo, en fin, que estas primicias responden a una riqueza y a una conjunción de estímulos intelectuales que seguramente, por aquel entonces, sólo podría brindar un medio como la Academia.

4. *El caso de la reducción al absurdo.*

El desarrollo de la reducción al absurdo corrobora e ilustra el punto de vista adoptado sobre la constitución de la idea de demostración. Pero ahora puede servirnos sobre todo para poner de relieve la trama lógica que viene a redondear el concepto cabal de prueba efectivamente concluyente (negativa o indirecta, en este caso). Si la reflexión filosófica (epistemológica, metodológica) es, como la consabida lechuza de Atenea, un ave de vuelo tardío, la conciencia y la reflexión lógicas se hacen esperar más todavía. Tendrá que ser Aristóteles quien dé este último paso: el de exponer las condiciones lógicas que hacen de este tipo de refutación una contraprueba rigurosamente definida y definitiva. Por añadidura, también es Aristóteles quien inicia una discusión metodológica y epistemológica en torno precisamente al valor y al sentido demostrativos de esta forma de argüir por recurso a lo imposible. Es una cuestión que luego ha trascendido este marco original y en algún aspecto, por algún motivo antiguo o por otros nuevos, continúa siendo contemporánea.

Como ya ha sugerido, en el uso metódico de la reducción al absurdo podría verse una especialización de la deducción condicional a efectos destructivos, con miras a refutar una proposición. Este tipo de argumentación crítica suele recibir el nombre de «elenco *[élenhkos]*» —término que inicialmente quizás tuvo un sentido más neutral de «criterio» o «prueba de contrastación», e.g. en Parménides 28 B 7 5—. Sus aplicaciones cubren un amplio ámbito de usos en diversos medios: retóricos, forenses, filosóficos, científicos. Un patrón general de procedimiento en esta línea crítica es el llamado *Modus Tollens:* si una proposición, «α», es verdadera también habrá de serlo una de sus implicaciones, «β»; ahora bien, comprobamos que «β» no resulta verdadera —por la razón que sea—; así pues, concluimos que la asunción o proposición inicial, «α», tampoco es cierta. La reducción lógica al absurdo es una aplicación específica de este patrón en la medida en que se atiene a unas condiciones singulares y precisas. En primer lugar, la razón que lleva a descartar la verdad de «β» es su inviabilidad lógica: «β» constituye una contradicción en sí misma o envuelve unas consecuencias lógicamente incompatibles en el marco discursivo dado. En segundo lugar, esta inviabilidad de una de sus implicaciones pone de manifiesto la propia inviabilidad lógica de «α»: lo afirmado o supuesto en la proposición «α» resulta no sólo falso de hecho sino imposible.

El camino que llevó a los griegos hasta las nociones precisas de contradicción y de incompatibilidad lógica fue —como el viaje a Itaca de Kavafis— largo, rico en experiencias y conocimientos. Discurre, en especial, a través de un prolongado trato con diversas relaciones de oposición entre ideas y entre proposiciones, una amplia experiencia en la aplicación de estas relaciones a la argumentación con propósitos heurísticos y críticos, la incipiente organización de ciertos marcos discursivos como cuerpos de conocimiento y una conciencia práctica de ciertos «poderes lógicos» de las proposiciones dentro de esos marcos (implicaciones, consecuencias, compatibilidades, incompatibilidades). Hay signos de todo ello en el desarrollo filosófico, dialéctico y matemático que precede a Aristóteles, como ya he apuntado antes.

4.1

En este largo camino hacia la lógica de la reducción al absurdo suele reconocerse la existencia de dos hitos concretos: la **dialéctica**

eleática y el **elenco** socrático. Son, por lo menos, las formas primordiales de refutación dialéctica que los filósofos griegos conocieron antes del s. IV a.n.e., Aristóteles da fe de esta doble tradición cuando relaciona tanto a Zenón de Elea (frag. 65) como a Sócrates (*Metaphys.* M 4, 1078b23-24) con los inicios de la dialéctica. La contribución eleática es más interesante desde el punto de vista de la reducción al absurdo y de la prueba indirecta; en cambio, la socrática ilustra mejor una vía discursiva más general, sustancialmente dialogal y pragmática, de desarrollo de la argumentación crítica o destructiva.

Veamos un ejemplo de la dialéctica de Zenón: el «argumento del estadio». Si el movimiento existe, consideremos un conjunto de cuerpos del mismo tamaño y envergadura que se mueven a la misma velocidad en un estadio. Bajo ciertas condiciones, no llevarían a cabo el mismo movimiento en el mismo tiempo, sino que la distancia recorrida por unos sería el doble que la cubierta por los otros; de modo que ese mismo tiempo resultará a la vez el doble y la mitad. Pero esto es absurdo. Luego, el movimiento no existe (Aristóteles: *Phys.* IV 9, 239b; Simplicio: *In Arist. Phys.* 1016.9-1019.14).

Un esquema general de este tipo de refutaciones podría ser el siguiente:

Examinemos la tesis α (contraria a la que interesa sostener). Si α es el caso, entonces resultarán tanto el caso β como el caso opuesto β^*. Pero los casos β y β^* conforman un absurdo. Luego, la tesis α es insostenible.

El examen de la tesis o proposición en cuestión tiene lugar en un marco disyuntivo de concepciones contrarias y reviste una forma condicional: se realiza explicitando sus consecuencias paradójicas, «absurdas» (como ya he apuntado, esta operación es por lo general una *reducción aporética* antes que una reducción lógica al absurdo propiamente dicha). El debate entre ideas y concepciones cosmológicas viene a ser un campo de aplicación habitual.

Como ejemplo de elenco socrático puede valer la discusión planteada en el *Gorgias* de Platón en torno a si la acción de cometer una injusticia es mejor y es preferible al hecho de padecerla (473a-480a). Polo, el interlocutor de Sócrates, mantiene esta creencia. Después, apremiado por el hábil embrollón, se ve obligado a comprometerse con otras asunciones del tenor de «cometer una injusticia es más feo que recibirla», «causa más daño, incluso a uno mismo, cometerla que sufrirla», «lo más feo y más dañino no es preferible a lo menos, sino

que es peor». De ahí se desprende justamente la asunción de una creencia opuesta a la mantenida en un principio. Así pues, la creencia inicial resulta falsa (479e) —y además acaba revelando la incoherencia del conjunto de las opiniones que Polo ha sustentado sobre el punto en cuestión (480a)—. El elenco socrático responde a un esquema como éste:

X asume la creencia, α. X reconoce asimismo en el curso de la discusión las creencias $\beta_1 \ldots \beta_n$. Pero de ($\beta_1 \ldots \beta_n$ se desprende α^* (una creencia u opinión opuesta a la asunción de partida, α). Luego, la presunción inicial acerca de la verdad de α queda refutada.

En general, la refutación socrática es un desmentido inducido por el curso de la discusión, que puede moverse entre la reducción de una creencia a una falsedad de hecho —admitida por el propio interlocutor de Sócrates—, y la reducción de un conjunto de creencias a una especie de inconsistencia pragmática —igualmente reconocida— [25]. Su campo de aplicación suele ser el debate de posturas éticas y de creencias filosóficas en general.

Las limitaciones básicas de la dialéctica eleática y del elenco socrático en la perspectiva de la lógica de la reducción al absurdo fueron claramente advertidas por Aristóteles. Como él mismo denuncia a propósito de los argumentos de Sócrates, estos precedentes muestran una habilidad dialéctica que aún no es capaz de investigar las relaciones entre contrarios (*Metaphys*, M 4, 1078b25-26); aún no está en condiciones de captar y analizar la lógica de la oposición, pese a ejercitarse en contrapruebas que quieren ser contundentes. Quizás debamos a Platón los primeros escarceos en torno a las relaciones de oposición; por lo menos disipa algunas dificultades y confusiones corrientes en el uso de la oposición y del dilema, sienta las bases de un método de división *[diaíresis]* y forcejea con distintos

---

[25] Vid. en *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, I (1983) los estudios y las observaciones de G. Vlastos, pp. 27-58 y 71-74; R. Kraut, pp. 59-70; C.H. Kahn, pp. 75-121. También puede verse A. Vargas: «Las refutaciones socráticas», en el colectivo: *Argumentación y filosofía*, México, 1986, pp. 13-29. La suerte histórica posterior de la dialéctica eleática y del elenco socrático fue muy dispar. Durante el helenismo, la influencia de la lógica estoica y el predominio de la demostración escrita sobre el discurso dialogal hacían esperar que la dialéctica tuviera mejor fortuna que el elenco. Por contra, en la época medieval y postmedieval, el llamado «methodus socratica» pasó a representar el método antiguo por excelencia frente a la «*disputatio* moderna (escolástica)», y el llamado «methodus megarica» de refutación apenas fue recordado siquiera.

opuestos en el *Sofista* cuando trata de elucidar las relaciones que median entre los cinco tipos generales (Ser, Quietud, Cambio, Igualdad, Diferencia) en lo que se refiere a su ser y no ser respectivos. También son de Platón el primer texto donde se reconoce la necesidad de atender a precisiones de tiempo y de respecto para decidir si dos asertos que afirman y niegan algo de un mismo sujeto son justamente contradictorios o no (*Eutidemo,* 293c), y la primera declaración franca de un principio de no contradicción: «Es evidente que una misma cosa nunca producirá ni padecerá cosas contrarias en el mismo sentido, con respecto a lo mismo y al mismo tiempo» (*República* IV, 436b8 ss.). Pero ni estos logros ni la percepción de la diferencia entre una prueba concluyente y un argumento retórico (e.g. *Teeteto,* 162e-163a; *Timeo,* 51e) privarán al Sócrates platónico de incurrir en los vicios comunes del sofista, sea con fines críticos o destructivos (e.g. *Protágoras,* 330c), sea con fines constructivos o «demostrativos» (e.g. *Fedón,* 78d1 ss.; 51b7 ss.). Por lo demás, el uso del método de división en el seno de la Academia se prestó a nuevos equívocos acerca de la fuerza lógica de argumentación sobre opuestos, y contrajo nuevas confusiones entre la definición o delimitación de conceptos y la demostración (cf. por ejemplo el testimonio crítico de Aristóteles: *APo* II 5, 91b13 ss.).

4.2

Según Aristóteles, una reducción al absurdo o a lo imposible *[apagogé eis tò adýnaton]* puede describirse así: (i) Parte de la suposición a excluir —i.e. de una proposición que constituye la negación estricta de la que, a fin de cuentas, se piensa establecer—. *(ii)* Incluye alguna otra premisa auxiliar, reconocida o asumida como cierta y fuera de cuestión. *(iii)* Concluye en una contradicción o en una incompatibilidad lógica manifiesta. *(iv)* El proceso deductivo es lógicamente válido. *(v)* En consecuencia, hay que descartar la suposición en virtud de la cual se ha llegado a la conclusión de ese absurdo lógico (vid. por ejemplo *APr.* I 23, 41a23 ss.; II 11, 61a19 ss.). La ilustración favorita de Aristóteles es el socorrido caso de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado; a él acude incluso para mostrar algún uso torpe y falaz de esta reducción (e.g. en *APr.* II 17, 65a38-b21).

Si los desarrollos conceptuales y dialécticos que he mencionado

no colman las condiciones exigidas por una conciencia lógica cabal de la reducción al absurdo, se debe ante todo al hecho de que aún faltan dos pasos decisivos en este sentido: la determinación de una «gramática lógica» —digamos— de las relaciones de oposición, en cuyos términos se caracterizan con precisión los enunciados contradictorios, y la elucidación de los supuestos que gobiernan su uso deductivo (bivalencia, no contradicción, tercero excluido).

El análisis aristotélico de la estructura lógica de las relaciones de oposición parece moverse al principio en una línea exploratoria e informal, por ejemplo en las *Categorías* 10, 11b18 ss. En *De la interpretación*, este análisis ya alcanza cierta madurez en su doble dimensión lingüística y lógica. El punto de partida es una modulación de la estructura heredada de la oración: nombre *[ònoma]* / verbo *[rhêma]* (*De Int.* 2-4, 16a19-17a7; cf. Platón: *Crátilo*, 425 a, *Sofista*, 262a ss.). El tipo de oración pertinente es el enunciado *[apóphansis]* en el que un predicado se dice significativamente de un sujeto, pues sólo las oraciones enunciativas o declarativas pueden ser verdaderas o falsas. Una oración de este tipo puede consistir en una afirmación *[katáphasis]* o en una negación *[apóphasis]*; cada enunciado afirmativo cuenta con su posible contrapartida negativa y a la inversa. La oposición que hay entre dos asertos cuando uno de ellos afirma y el otro niega lo mismo acerca de una misma cosa, constituye una contradicción *[antíphasis]* (*Ibd.* 6, 17a23-37). Dados estos antecedentes, es la cuantificación del sujeto del enunciado (índice, a su vez, del alcance o generalidad de la proposición) la que constituye el último paso hacia una perspectiva netamente lógica del análisis (*Ibd.* 7-8, 17a38 ss.). Dos enunciados son contrarios si consisten en una afirmación y una negación relativas a un mismo sujeto universal, e.g. «todo hombre es blanco»/«ningún hombre es blanco». Pero si uno declara (afirma o niega) universalmente lo mismo que el otro declara en sentido inverso y no de modo universal, los enunciados resultan contradictorios, e.g.: «todo hombre es blanco» / «no todo hombre es blanco», «ningún hombre es blanco»/«algún hombre es blanco»; también resultarán contradictorias las afirmaciones y negaciones parejas sobre un mismo sujeto singular («Sócrates es blanco»/ «Sócrates no es blanco»). Todavía es más preciso el análisis que tiene lugar dentro del marco del lenguaje y del sistema silogísticos de los *Primeros Analíticos* (II 15, 63b24-31, 64a37-40). Aristóteles introduce un cambio tácito en el análisis de la estructura de la predicación, centra ahora su atención en las proposiciones congruentes con la «gramá-

tica» del sistema, a saber: premisas generales (enunciados universales o particulares), y deja al margen los términos singulares y los indefinidos que considerara en *De la interpretación*. Hay entonces cuatro clases de predicaciones opuestas *[antikeiménai]*: (a′) la que cubre a todos —los objetos que forman parte de la extensión del sujeto— y a ninguno, e.g. «todos los A son B»/«ningún A es B»; (b′) la que cubre a todos y no a todos —no se dice de alguno—, e.g. «todos los A son B»/ «algún A no es B»; (c′) la que cubre a alguno y a ninguno, e.g. «algún A es B»/«ningún A es B»; (d′) la que cubre a alguno y no cubre a alguno, e.g. «algún A es B»/«algún A no es B». Esta última no pasa de ser una oposición verbal entre compatibles. La primera, (a′), es la oposición de contrariedad. Las dos restantes, (b′) y (c′), son oposiciones de contradicción.

El análisis aristotélico desvela además algunas relaciones lógicas importantes, junto con ciertas reglas de argumentación correspondientes. E.g.: dos proposiciones contrarias son incompatibles entre sí, por ende no podrán ser verdaderas a la vez —aunque puedan resultar ambas falsas—; luego, de la verdad de una se sigue la falsedad de la otra —pero no vale a la inversa—. Dos proposiciones contradictorias no sólo son incompatibles sino enteramente excluyentes de modo que, por necesidad, una de ellas habrá de ser verdadera y la otra falsa; luego, del valor veritativo, la verdad o la falsedad, de una se sigue el valor inverso respectivo, la falsedad o la verdad, de la otra. Con todo, no son los *Analíticos* el lugar donde expresamente constan los supuestos lógicos de la reducción al absurdo, sino el *De la interpretación* y la *Metafísica*. Esos supuestos primordiales vienen a ser los siguientes:

1. Sean P y S, respectivamente, un predicado y un sujeto dados con unos significados congruentes entre sí. Entonces, siempre cabe afirmar o negar P de S, pues toda afirmación admite una negación correlativa y a la inversa (*De Int.* 6, 17a31-33).

2. Llamemos «contradicción *[antíphasis]*» al par constituido por dos enunciados opuestos en el sentido de afirmar y negar inequívocamente lo mismo de lo mismo (*Ibd.*, 17a33-37). Entonces, «lo más cierto de todo es que los enunciados contradictorios no pueden ser simultáneamente verdaderos» (*Metaphys.* Γ 7, 1011b13-14); «es imposible afirmar y negar con verdad al mismo tiempo [y en el mismo respecto]» (*Ibd.*, 1011b21-23). Este supuesto lógico tiene una dimensión ontológica: «un mismo atributo no puede convenir y no convenir al mismo tiempo a un mismo sujeto bajo el mismo respecto»

(*Metaphys.* Γ 3, 1005b19-20), así como repercusiones epistemológicas: «es imposible que alguien crea que una misma cosa es y no es» (*Ibd.,* 1005b23-24). Constituye en suma un principio básico de la argumentación racional: «está claro que es imposible que uno mismo admita que la misma cosa es y no es al mismo tiempo» (*Ibd.,* 1005b29-30).

3. No es posible que haya un término medio entre los miembros de un par contradictorio, sino que es necesario o bien afirmar o bien negar el predicado del sujeto dado (*Metaphys.* Γ 7, 1011b23-24) [26].

Los enunciados (las afirmaciones y las negaciones) se caracterizan por comportar verdad o falsedad, de modo que cabe entender 1. como un supuesto de bivalencia veritativa; 2. es el principio de no contradicción; 3. es el principio de tercero excluido. De ahí se desprenden las relaciones inherentes a los enunciados que forman una contradicción genuina: si la afirmación es verdadera la negación pareja es falsa, y si la afirmación es falsa la negación es verdadera, siendo preciso que un miembro del par sea verdadero y el otro falso. En suma: los miembros de una contradicción son incompatibles entre sí y todo par contradictorio constituye una disyunción exhaustiva.

4.3

A pesar de esta elucidación del carácter lógicamente concluyente de la reducción al absurdo, Aristóteles considerará que es un tipo de argumentación hipotética *[ex hipothéseos]* y no tiene sitio entre los esquemas silogísticos que constituyen la infraestructura lógica de la

---

[26] Estos presupuestos discursivos y dialécticos no forman parte del sistema silogístico de los *Primeros Analíticos.* Por lo demás, el planteamiento de Aristóteles envuelve ciertas ambigüedades (cfr. *Metaphys.* Γ 3, 1005B32-34, Y *APo.* I 11, 77a10-11; vid. *APo.* I 11, 77a23-24); en particular, cuando considera el tercero excluido en relación con las proposiciones acerca de hechos futuros contingentes —«habrá mañana o no habrá una batalla naval»— (*De Interp.* 9, 19a28-19b2 en especial). Como muestras de la discusión suscitada por este último pasaje, vid. S. Haack: *Deviant Logic,* Cambridge Univ. Press, 1974, c. 4, pp. 73-90; P.T. Geach: «The law of exclused middle», en *Logic Matters,* Oxford, 1972, 2.5, pp. 74-87; J. Hintikka: «The once and future sea fight: Aristotle's discussion of future contingents in *De Interp.* 9», en *Time and Necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality,* Oxford, 1975 reimp., viii, pp. 146-166.

demostración científica preconizada en los *Analíticos* (vid. *APr.* I 23, 40b25-30; I 44, 50a16-19, 29-39). Los defectos de la reducción al absurdo o de la demostración indirecta, frente a la directa, no son de orden lógico sino más bien metodológicos y epistemológicos. A juicio de Aristóteles, tales defectos estriban en la índole no sólo hipotética sino —digamos— esencialmente irreal de la suposición de partida, así como en la incapacidad de una prueba de este tipo para dar una explicación interna y sustancial de lo demostrado. La opinión de Aristóteles sobre una y otra formas de deducción, la demostración directa y la prueba indirecta por medio de una reducción al absurdo, se podría resumir así:

a/ Son dos tipos de argumentación lógicamente concluyentes ambos, pero muy dispares entre sí pues la prueba indirecta parte de una hipótesis metodológicamente irreducible. Dicho con más precisión: dentro de los argumentos de esta clase caben deducciones típicamente silogísticas, pero su componente hipotética —la suposición inicial que luego habrá que descartar— no es asimilable a una premisa silogística demostrativa (*APr.* I 44 50a29-33).

b/ La demostración directa es superior a, o más valiosa que, la prueba indirecta (e.g. *APo.* I 26, 87a1-2, 25-30; por ejemplo, no sólo parte de unas verdades primordiales sino que puede tener plena capacidad explicativa.

c/ Pero, por otro lado, ambas pueden representar deducciones lógicamente equivalentes. Toda proposición deducible directamente por medio de silogismos se puede deducir parejamente por la vía indirecta de la reducción al absurdo, «a lo imposible», y a la inversa (*APr.* I 29, 45a26-28).

d/ En consecuencia, desde un punto de vista lógico deductivo, esta vía indirecta de prueba por reducción al absurdo no es indispensable y toda demostración puede llevarse a cabo por una vía silogística directa (*APo.* I 23, 41a20-41b3). Aristóteles no se detiene a justificar ni esa equivalencia deductiva, ni esta sustituibilidad de la vía indirecta por la directa.

La descalificación relativa de la demostración por reducción al absurdo y la creencia en que siempre se podrá sustituir por otra demostración directa equivalente han sido posteriormente bastante compartidas, tanto dentro de la tradición clásica de la demostración y del método deductivo como fuera de ella o al margen de los motivos avanzados por Aristóteles. Como muestra de la tradición clásica, recordemos la *Logique* de Port Royal (1662) que habla de la re-

ducción al absurdo como uno de los vicios comunes de los geómetras y sólo autoriza este recurso de prueba a falta de una demostración directa y positiva de la conclusión (IVème: «De la Méthode», ch. IX); esta tendencia parece culminar en la *Wissenschaftslehre* de Bolzano (1837): no sólo reitera la impropiedad de toda demostración que quiera partir de una premisa falsa, sino que propone la sustitución general de cada reducción al absurdo por una deducción directa del teorema correspondiente (IV, § 530) simplemente, al parecer, por obra y gracia de la contraposición de la implicación [27].

Las reservas actuales ante la reducción al absurdo pueden obedecer a diversos motivos, de los que sobresalen dos. Por un lado, no ofrece pruebas tan intuitivas e informativas como las que deparan otras demostraciones, en especial una demostración *constructiva* [28].

---

[27] Este supuesto de sustitución ya obra expresamente en C.S. Peirce (1902): «Reductio ad Absurdum», recogido en C. Hartshorne y P. Weis, eds.: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Vo. II, Harvard, 1932, pp. 366-9. Sin embargo, la sustituibilidad de una prueba indirecta por otra deducción directa lógicamente equipolente sólo empieza a ser factible por medio de un procedimiento más fino que la mera contraposición —que además de ampliar de modo sustancial el contenido teórico de las premisas del argumento original, supone cierto desarrollo de la lógica de la cuantificación—, como el propuesto bajo el nombre de «generalización» por L. Löwenheim: «On marking indireets proofs direct», edic. de W. O. Quine en *Sripta Mathematica,* 12 2 (1946), pp. 126-39. Puede verse a este respecto el informe de L.S. Cauman: «On indirect proof», *Scripta Mathematica,* 28 2 (1968), pp. 101-15.

[28] Una demostración constructiva nos da una pauta metódica para generar o producir (la prueba de) la conclusión. Consideremos la proposición «hay infinitos números primos». Es constructiva una demostración como la siguiente:

(i) Sea (p_1, p_2, ..., p_n) un conjunto finito de números primos.

(ii) Formemos ahora, por medio de operaciones tan sencillas como la multiplicación de factores y la adición, el número $p_1.p_2. ... .p_n + 1$; este número no es exactamente divisible por ninguno de los primos dados p_1, p_2..., p_n.

(iii) El número así formado o bien es primo a su vez, o bien es divisible por algún otro número primo, digamos: p_m.

(iv) Si es primo, no pertenece al conjunto finito originario. Si no lo es, resulta divisible por un primo, p_m, que tampoco pertenece a conjunto finito originario.

(v) Así que, en cualquier caso, nos encontraremos con un conjunto infinito de números primos, pues el mismo procedimiento puede aplicarse de igual modo a cualquier serie finita de números primos que se quiera considerar.

Una prueba por reducción al absurdo, no constructiva, sería la siguiente:

(i') Supongamos que el conjunto de los números primos no es infinito sino finito: consta precisamente de los miembros p_1, p_2, ..., p_n.

(ii') Sea el número: $p_1.p_2. ... .p_n + 1$.

Por otro lado, cabe poner en cuestión la validez de esta vía de argumentación bajo determinadas formas y en ciertos dominios. La forma clásica de la reducción al absurdo no sólo envuelve un patrón de prueba relativamente débil, que se detiene en la exclusión de la suposición considerada (de «α» se sigue la contradicción «β y no-β»; luego, «no-α»); también asume un patrón más fuerte (de «no-α)» se sigue la contradicción «β y no β»; así pues, «no-(no-β)»; luego «α», que además de descartar la suposición inicial pasa a establecer la necesidad de la alternativa opuesta. Esta forma fuerte hace justicia a la pretensión de ser la demostración indirecta de que algo es el caso, y supone efectivamente la vigencia omnímoda del principio de tercero excluido —o la validez absoluta de otro supuesto equivalente, como el de la doble negación: «no-(no-α)» implica, a la vez que es implicado por, «α»—, en cualquier dominio de aplicación, sea finito o sea infinito [29]. Los antiguos griegos no se cuidaron en absoluto de diferenciar una versión débil, puramente reductiva, y una vesión fuerte, indirectamente demostrativa, de la reducción al absurdo. Por ejemplo, Aristóteles describe la variante fuerte en *APr.* II 11, 61a19 ss., y se sirve de ella para establecer la generación mutua de los elementos corpóreos en *De Coelo* III 6, 305a14 ss.; hace referencia a la variante débil en *APr.* I 23, 41a26-30, y la emplea en *De Coelo* I 6, 247b27

(iii') Ahora bien, este número o bien es primo, o bien es divisible por algún otro número primo.

(iv') En cualquier caso, (iii') contradice la suposición inicial (i').

(v') Luego, nuestra suposición de partida es falsa y, por consiguiente, el conjunto de los números primos es infinito (hay infinitos números primos).

[29] La validez absoluta de la reducción al absurdo fuerte o clásica se ha puesto en cuestión por diversas consideraciones filosóficas de raíz lógica o de raíz matemática. Cabe aducir, por ejemplo, que en ciertos dominios infinitos no hay procedimiento efectivo para determinar si un enunciado dado (e.g. la conjetura de Goldbach o el «último teorema» de Fermat) es verdadero o falso; así que no tiene sentido asumir la disyuntiva de que cualquier enunciado «α» sobre este dominio ha de ser o verdadero o falso, o suponer que bastaría probar que no se da el caso de «no-α» para sentar que ciertamente se da el caso de «α». La restricción del tercero excluido o de suposiciones parejas suele fundarse, sobre todo en el marco de una filosofía anti-realista de la lógica o de una filosofía intuicionista de la matemática, sobre la base de que no toda proposición dispone de un método de verificación ni todo problema tiene solución. Pero no sé cuáles pudieron ser los motivos que llevaron a Aristóteles a formular en *APo.* I 11, 77a23-24, una especie de cláusula restrictiva de la aplicabilidad del tercero excluido: en el texto citado asegura que si bien este principio es asumido por la reducción a lo imposible, esto no ocurre siempre ni de forma general, sino sólo en la medida en que conviene al género de cosas considerado.

s., para rebatir la posibilidad de que el mundo, en su totalidad, constituya una entidad corpórea de dimensiones infinitas. Por lo demás, la lógica estoica y la práctica matemática de la prueba deductiva aún tendrían menos motivos, si cabe, para sentir algún reparo en este sentido.

La descalificación epistemológica de la reducción al absurdo no impide a Aristóteles aprovechar la fuerza lógica de este patrón de prueba en diversos contextos, sobre todo a efectos críticos en filosofía (e.g. en cosmología) y como medio informal de prueba de una peculiaridad estructural de su sistema silogístico, i.e. como una vía de reducción indirecta de los silogismos imperfectos a los silogismos «perfectos *[téleioi]*» (vid. más adelante, II § 2.3). Este segundo empleo difiere del uso ordinario del patrón con fines reductivos: no busca establecer una conclusión sustantiva acerca de un caso dado, la falsedad irremediable de una suposición sobre el particular o, subsiguientemente, la verdad de la proposición opuesta; sino que sirve para evidenciar la validez de ciertos silogismos o esquemas deductivos del propio sistema lógico aristotélico. Se trata de una aplicación metasistemática, «metalógica» diríamos, de este patrón de prueba (y es perfectamente compatible con su caracterización como una forma de deducción no propiamente silogística, no incluida entre los modos silogísticos que constituyen el sistema mismo).

El patrón reductivo también cumplió otros servicios dialécticos notables en filosofía, alguno tan depurado como la argumentación dirigida a mostrar que la necesidad de «α» es una consecuencia que se sigue incluso de su propia negación, de la suposición «no-α» [30]. Pero, en general, los frutos más ejemplares y duraderos fueron seguramente los de su aplicación en el campo de la argumentación matemática, tanto a efectos heurísticos como demostrativos.

Un empleo relevante de la reducción al absurdo con fines demostrativos es el que tiene lugar dentro del mal llamado «método

---

[30] Por este procedimiento quiere probar Aristóteles en el *Protréptico* la necesidad de la filosofía: pues incluso para establecer que no hay que filosofar habrá que aducir razones filosóficas. Pero fueron los estoicos quienes lo utilizaron con mayor frecuencia en el marco de dilemas contra los críticos escépticos que negaban la existencia de signos o de demostraciones (e.g.: o existe la demostración o no existe; si existe, se sigue que existe; si no existe, se sigue que existe —pues habrá que demostrar su no existencia—; luego en definitiva, la demostración existe. Vid. Sexto Empírico: *P.H.*, II 186). Quizá pueda adivinarse un precedente informal de esta refutación «auto-reductiva» en un argumento de Melisso contra la fiabilidad de los sentidos (30 B 8).

de exhausción». Supongamos que interesa determinar la magnitud (área, volumen) de una figura curvilínea. Un procedimiento es sentar la equivalencia entre la magnitud en cuestión y la magnitud de otra figura rectilínea previamente conocida. El teorema que se desea probar reviste entonces la forma **X** = Y, siendo **X** la figura curvilínea cuya magnitud se ignora e **Y** la figura rectilínea cuya magnitud es familiar. Como las magnitudes geométricas constituyen en la teoría de la proporción un sistema ordenado, **X** puede ser mayor o menor o igual que **Y** según un principio elemental de tricotomía. Excluimos las dos primeras posibilidades, **X** > Y y **X** < Y, por sendas reducciones al absurdo. Por consiguiente, queda establecida la equivalencia buscada, **X** = Y, como único resultado posible. (Más adelante, IV § 3.1, puede verse una ilustración concreta de este tipo de prueba que fue utilizado por Euclides y, con singular talento, por Arquímedes)

El uso de la reducción al absurdo con propósitos heurísticos cobra su mayor importancia al desarrollarse el *análisis* geométrico y cristalizar en unas técnicas complementarias de *análisis y síntesis*. El análisis se remonta desde la solución o resultado que se busca *[tò dsetoúmenon]*, como si fuera algo ya obtenido, e investiga las condiciones o supuestos de su obtención hasta alcanzar algún principio conocido de construcción o de prueba. La *síntesis* parte a su vez del punto de llegada del análisis, de algún principio congruente y admitido *[tò homologoúmenon]*, y establece deductivamente por el camino inverso la solución o el resultado en cuestión [31]. Si la síntesis consiste en un proceso de deducción normal, el análisis tiene un

[31] Hay tres versiones clásicas del proceder por análisis y síntesis: una de Pappo: *Synagogé*, VII, 634-636, y otras dos sumamente breves —en un escolio añadido a los primeros teoremas de los *Elementos* XIII, y en el comentario de Herón a los *Elementos* II transmitido por al-Nairizi—. Todas ellas se prestan a algún que otro equívoco. En todo caso, la interpretación del análisis geométrico griego ha suscitado discusiones sin cuento, vid. por ejemplo la compilación de comentarios antiguos en J. Hintikka y U. Remes (1974): *The Method of Analysis*, o.c., ch. II, así como las contribuciones citadas en el ch. II. Creo que de la profusa literatura hermenéutica sobre este presunto «método» cabe destacar los planteamientos de M.S. Mahoney (1968): «Another look at Greek geometrical Analysis», art. c.; E. Berti (1984): «L'analisi geometrica della tradizione euclidea e l'analitica di Aristotele», art. c; y W.R. Knorr (1986): *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, o.c., cuyas pp. 339-381 contienen excelentes observaciones sobre el campo cubierto por el análisis geométrico y sobre el sentido que los comentadores helenísticos dieron a su empleo (primordialmente en orden a la resolución técnica de determinados problemas).

proceder no exento de dificultades y a veces esta investigación queda sujeta a la existencia de una demostración ulterior por la vía de síntesis. En todo caso, hay una cuestión de orden lógico que no dejó de ser advertida por Aristóteles [32]. Estriba en que lo verdadero puede seguirse de hecho de algo falso aunque lo falso no pueda seguirse en absoluto de lo verdadero. Así que en la síntesis estamos a salvo. Pero en el análisis cabe inferir una condición o un supuesto verdaderos desde una presunción falsa (la solución o el resultado que se habían tomado como dados y punto de partida). Por otro lado, también cabe remontarse a una serie de supuestos necesarios que, en conjunto, no resultan suficientes para establecer efectivamente esa asunción de partida. En pocas palabras, el análisis no tiene asegurada su convertibilidad sintética, su reversibilidad efectivamente demostrativa. La utilidad de la reducción se desprende de esta regla heu-

---

[32] En *APo.* I 12, 78a7-13, señala que «si fuera imposible deducir la verdad a partir de la falsedad, sería fácil hacer un análisis; porque [premisas y conclusiones] serían convertibles de necesidad. Pues sea A algo que presuntamente es el caso; y si tal es el caso, entonces esto otro es el caso, a saber: algo que sé que es cierto, digamos B. Por consiguiente, de esto se probaría que lo primero es el caso. En matemáticas hay más [premisas y conclusiones] convertibles porque no se asume nada incidental —y en esto también difieren de las argumentaciones en general—, sino sólo definiciones». A la luz del *Menón* 86d-87a, los diorismos cumplen a veces en la resolución de problemas un servicio análogo al de las definiciones en la prueba de teoremas. Esta dificultad lógica del análisis podría obviarse en la línea de la reconstrucción que proponen J. Hintikka y U. Remes (1974, o.c.,; 1976, art. c.). Por un lado prefieren ver en el proceso analítico no una investigación de consecuencias retrodictivas, derivadas de la suposición del caso planteado como un caso resuelto o dado, sino una investigación de concomitancias, cuyo resultado será establecer si la hipótesis inicial es coherente o casa con otras verdades previamente conocidas. La verdad de la hipótesis se comprueba mostrando que "es congruente con" los principios de la teoría; la falsedad, mostrando que no cuadra o es incompatible con ellos. Por otro lado, sugieren que el método funciona mediante el examen de casos concretos de aplicación (*ékthesis*) de la hipótesis en cuestión. Si la búsqueda sistemática de contraejemplos fracasa, este intento fallido de reducir la proposición al absurdo —a una composición imposible con los principios— se convierte en una señal positiva de que tal proposición es deducible de estos principios. La lógica contemporánea nos ha familiarizado desde los años 50 con este análisis metódico de contraejemplos; pero, aparte de las virtudes lógicas internas de este método semántico, no hay mayores motivos para adivinar un uso análogo de dicho procedimiento por parte de los geómetras antiguos. Es más verosímil que su modo de proceder fuera menos lúcido, más informal y se asemejara a los experimentos mentales de contrastación y prueba que ha apuntado Lakatos: «El método de análisis-síntesis», en (1978): *Matemáticas, ciencia y epistemología*, o.c., pp. 103-144.

rística: puestos ante una conjetura, saquemos las implicaciones —más en el amplio sentido de «implicación» que en un sentido estricto de *consecuencia* lógica— congruentes con su asunción como si fuera verdadera: si llegamos a alguna implicación falsa o a algún supuesto inconsistente, está claro que nuestra conjetura no es viable dentro de este marco de conocimiento. Podemos ahorrarnos el esfuerzo ulterior de la síntesis. En cambio, si llegamos a algún supuesto primordial e inequívocamente verdadero, la conjetura podría ser en efecto verdadera. Invirtamos entonces el proceso y tratemos de deducirla a partir de esta verdad cierta: si lo conseguimos, habremos establecido la solución o el resultado que habíamos conjeturado. Un beneficio adicional de este procedimiento es la determinación de condiciones y limitaciones en la solubilidad de determinados problemas o en el alcance de determinados teoremas, la determinación de «diorismos *[diorismoí]*»: datos o restricciones capaces de hacer efectivamente reversible un curso de inferencia bajo ciertos supuestos y, más en general, medios de saber cuándo un problema es soluble y cuándo no es soluble. A la luz de Platón (*Menón*, 68d-87b) y de Proclo (*In Eucl. I Comm.*, 66.22-67.1), las primeras investigaciones de este tipo datan de las primeras décadas del s. IV a.n.e. Después, al igual que las técnicas de análisis y los métodos reductivos en general, formarán parte del bagaje instrumental de los geómetras que traten de resolver problemas no elementales, según revela el *Tópos Analuómenos* de Pappo (*Synagogé*, VII).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

A

Los filósofos presocráticos. Edic. dirigida por C. Eggers. 3 vols. Madrid, 1978-1980.

The Fragments of Parmenides. Edic. crítica, versión y comentario de A. H. Coxon. Assen/Wolfeboro (*Phronesis,* Supp. 3). 1986.

Thomas, I., ed.: *Selections of Greek Mathematics.* London/Cambridge (Mass.), 1939, 1967 3ª reimp.

García Bacca, J. D.: *Textos clásicos para la historia de las ciencias.* Vol. I. Caracas, 1961.

Platonis Opera. Edic. de J. Burnet. 5 vols. Oxford, 1900-1907, reimp. posteriores.

Platón: *Diálogos.* Edic. española en curso de publicación. Vols. publicados I-V. Madrid, 1981-1988. Introd. general de E. Lledó, I, pp. 7-135.

Aristotelis Analytica et Posteriora. Edic. de W. D. Ross. Oxford, 1964.

The Complete Works of Aristotle. Ed. J. Barnes. 2 vols. Princeton, 1964.

Metafísica de Aristóteles. Edic. trilingüe (griego, latín, español) de V. García Yebra. Madrid, 1970, 1982 2ª edic. rev.

Aristóteles: *Tratados de Lógica (Organon).* Versión de M. Candel. Vol. I, Madrid, 1982; vol. II, Madrid, 1988.

The Thirteen Books of Euclid's Elements. Edic. inglesa de Th. L. Heath. 3 vols. (Cambridge, 1908, 1925) New York, 1956.

Cohen, M. R., Drablin. I. E.: *A Source Book in Greek Science.* Cambridge (Mass.), 1948, 1958.

B

Becker, O.: *Das mathematische Denken der Antike.* Göttingen, 1957.

Becker, O. (1959): *Magnitudes y límites del pensamiento matemático.* Madrid, 1966.

Becker, O.:*Zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Darmstad, 1965.

Berggren, J. L.: «History of Greek mathematics: a survey of recent research», *Historia Mathematica,* 11 (1984), pp. 394-410.

Berka, K.: «Was there an Eleatic background to pre-Euclidean mathematics?», en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds.: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology.* Dordrecht/Boston/London, 1980; pp. 124-131.

Berti, E.: «L'analisi geometrica della tradizione euclidea e l'analitica di Aristotele»,. en G. Giannantoni, M. Vegetti, eds.: *La scienza ellenistica.* Napoli, 1984; pp. 95-127.

Boyer, C. B. (1968): *Historia de la matemática.* Madrid, 1986; cc. II-VI.

Bourbaki, N. (1969): *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid, 1972, 1976.

Cambiano, G.: «Il metodo ipotetico e le origine delle sistemazione euclidea della geometria», *Rivista di Filosofia,* 58 (1967), pp. 115-149.

Carruccio, E. (1962): *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought.* London, 1964.

Cauman, L. S.: «On indirect proof», *Scritpa Mathematica,* XXVIII 2 (1968), PP. 101-172.

Crombie, I. M. (1962): *Análisis de las doctrinas de Platón.* 2 vols. Madrid, 1979.

Detienne, M. (1967): *Los maestros de verdad en la Grecia arcaica.* Madrid, 1981.

Detienne, M., dir.: *Les savoirs de l'écriture en Grèce ancienne.* Presses Universitaires de Lille III, 1988.

Freudenthal, H.: «Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'antiquité?», *Bull. Soc. Mathém. de Belgique,* XVIII (1966), pp. 4-34.

Fritz, K. von: «The discovery of incommensurability by Hipassus of Metapontum», *Annals of Mathematics,* 46 (1945), pp. 242-264.

Fritz, K. von: «Die APXAI in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte,* 1 (1955), pp. 13-103.

Fritz, K. von: *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft.* Berlin/New York, 1971.

Furley, D. J.: «Parmenides of Elea», en P. Edwards, ed.: *The Encyclopedia of Philosophy.* New York/London, 1967, 1972; vol. 6, pp. 47-51.

Goodstein, R. L. (1948): «Proof by reductio ad absurdum», en sus *Essays in the Philosophy of Mathematics.* Leicester, 1965; 1, pp. 1-11.

Gomperz, H: «Problems and methods of early Greek science», *Journal of the History of Ideas,* IV 2 (1943), pp. 161-176.

Guthrie, W. K. C. (1962; 1965): *Historia de la filosofía griega.* Vols. I y II. Madrid, 1984, Vol. III, Madrid, 1988.
Hare, R. M.: «Plato and the mathematicians», en R. Bambrough, ed.: *New Essays on Plato and Aristotle.* London/New York, 1965, 1979; pp. 21-38.
Hasse, H., Scholz, H.: «Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik», *Kant-Studien,* 33 (1928), pp. 4-34.
Heath, Th. L.: *A History of Greek Mathematics.* 2 vols. (Oxford, 1921) New York, 1981.
Heath, Th. L.: *Mathematics in Aristotle.* Oxford, 1949.
Hintikka, J., Remes, U.: *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Dordrecht/Boston, 1974.
Hintikka, J., Remes, U.: «Ancient Geometrical Analysis and Modern Logic», en R. S. Cohen, P. K. Feyerabend, M. W. Wartofsky, eds.: *Essays in Memory of Imre Lakatos.* Dordrecht/Boston, 1976; pp. 253-276.
Kahn, Ch. H.: *The Verb «Be» in Ancient Greek.* Dordrecht/Boston, 1973.
Kahn, CH. H.: «Retrospect on the verb "to be" and the concept of being», en S. Knuutila, J. Hintikka, eds.: *The Logic of Being.* Dordrecht/Boston, 1986, pp. 1-28.
Kline, M.: *Mathematical Thougt from Ancient to Modern Times.* New York, 1972.
Knorr, W. R.: *The Evolution of the Euclidean Elements.* Dordrecht, 1975.
Knorr, W. R.: «On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity», en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds. (1980), o.c., pp. 145-186.
Knorr, W. R.: «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», en N. Kretzmann, ed.: *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought.* Ithaca (N. J.), 1982, ch. IV, pp. 112-145.
Knorr, W. R.: *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston/Basel/Stuttgart, 1986.
Lakatos, I. «El método de análisis-síntesis» en su (1978, comp. póstuma a cargo de J. Worral y G. Currie): *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid, 1981; pp. 103-144.
Löwenheim, L.: «On making indirects proofs direct», *Scripta Mathematica,* XII 2 (1946), pp. 125-139 (versión inglesa de W. O. Quine).
Lledó, E.: *La memoria del Logos.* Madrid. 1984.
Lloyd, G. E. R. (1966): *Polaridad y analogía.* Madrid, 1987.
Lloyd, G. E. R.: *Magic, Science and Experience.* Studies in the origins and development of Greek science. Cambridge University Press, 1979, 1984 reimp.
Mahoney, M. S.: «Another look at Greek geometrical analysis». *Archive for History of Exact Sciences,* 5 (1968), pp. 318-348.
Neugebauer, O. (1952; 1957): *The Exact Sciences in Antiquity.* New York, 1969.

Owen, G. E. L.: «Eleatic Questions», *Classical Quarterly,* 10 (1960), pp. 84-102; recogido también en Owen (1986): *Logic, Science, Dialectic,* pp. 3-26.

Owen, G. E. L.: «Zeno and the mathematicians», incluido en su compilación: *Logic, Science and Dialectic.* Itahaca, 1986; pp. 45-61.

Peirce, Ch. S. (1905): «Reductio ad absurdum» en los *Collected Papers of Charles Sanders Peirce,* vol. II, Cambridge (Mass.), 1932; pp. 366-368.

Ryle, G.: «Dialectic in Academy», en R. Bambrough, ed. (1965, 1979): *New Essays on Plato and Aristotle,* o.c., pp. 39-68.

Seidenberg, A.: «The Origin of Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences,* 18 (1978), pp. 301-342.

Szabó, A.: «Deiknymi, als mathematische terminus für Beweisen», Maia, X (1958), pp. 106-131.

Szabó, A.: «The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms», *Scripta Mathematica,* XXVII 1 y 2 (1964), pp. 27-48 y 113-139.

Szabó, A.: «Greek dialectic and Euclid's axiomatics», en I. Lakatos, ed.: *Problems in the Philosophy of Mathematics.* Amsterdam, 1967; pp. 1-8; Discussion, pp. 9-27.

Szabó, A. (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics.* Dordrecht/Budapest, 1978.

Szabó, A.: «Working backward and proving by sinthesis», en J. Hintikka y U. Remes (1974), o.c., pp. 118-130.

Tannery, P.: *Pour l'histoire de la sciece hellène.* Paris. 1887.

Vega, L.: «Sobre la invención griega de la idea de demostración», *Llull,* 8 (1985), pp. 149-173.

Vegetti, M. (1979): *Los orígenes de la racionalidad científica.* Barcelona, 1981.

Vernant, J.-P. (1962): *Los orígenes del pensamiento griego.* Buenos Aires, 1973.

Vernant, J.-P. (1965): *Mito y pensamiento en la Grecia antigua.* Barcelona, 1973.

Vidal-Naquet, p. (1981): *Formas de pensamiento y formas de sociedad en el mundo griego.* Barcelona, 1983.

Vlastos, G.: «Zeno of Elea», en P. Edwards, ed. (1967, 1972), o.c., vol. 8, pp. 369-379.

Vlastos, G.: «The socratic elenchus», en *Oxford Studies in Ancient Philosophy,* III. Oxford, 1983; pp. 27-58.

Waerden, B. L. van der (1950). *Science Awakening.* (Groningen, 1954) New York, 1963.

Waerden, B. L. van der (comm. A. Seidenberg): «On Pre-Babylonian Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences,* 23 (1980), I, pp. 1-25; II, pp. 27-46.

Capítulo 2

LA TEORIA ARISTOTELICA DE LA DEMOSTRACION

1. *Una introducción al espíritu y la letra.*

La teoría aristotélica de la demostración que vamos a examinar envuelve un análisis cabal de la idea de *apódeixis* en el marco de un programa acerca de la constitución de las ciencias como cuerpos de conocimiento demostrado. Representa la primera muestra de lo que hoy consideramos una metodología: es la primera reflexión analítica sobre algunos conceptos estructurales de la investigación y de la exposición científicas (la demostración, la explicación, la definición; la conformación deductiva de las teorías; la lógica subyacente). Pero esta calidad metodológica no convierte los *Analíticos* en el precedente de las actuales «exploraciones metacientíficas», ni hace de Aristóteles el padre fundador de nuestra filosofía de la ciencia. Los *Analíticos* aristotélicos y nuestra metodología de las ciencias deductivas contemplan perspectivas muy distintas aunque miren hacia unos referentes genéricamente comunes como *la ciencia* o *la demostración*. La reflexión de Aristóteles versa sobre una disposición epistémica —así entiende la ciencia— y sobre una forma depurada de discurso racional, el lógos que (descrito a la manera del *Fedro*, 276a) «se escribe con el conocimiento en la mente del que aprende y es capaz

de defenderse a sí mismo». Son objetos de consideración bastante alejados del horizonte analítico actual. Del viejo Aristóteles nos separan en realidad muchas distancias, no sólo el tiempo, y profundas diferencias.

Por ejemplo, hoy procuramos discernir dos vertientes de la consideración filosófica de la ciencia, una «descriptiva», que analiza o reconstruye lo que la ciencia es, cómo procede, y otra «normativa», que discurre sobre cómo debe ser para lograr sus fines cognoscitivos. Son aspectos no insolidarios pero sí distintos. Sin embargo, en Aristóteles el contenido analítico y la significación programática de su reflexión sobre el saber científico vienen tan estrechamente fundidos que la distinción entre los aspectos «descriptivos» y los «normativos» resultaría no sólo extraña sino ilegítima. Lo cual no es más que un síntoma de peculiaridades más sustanciales, e.g. Aristóteles considera el fin y la norma, lo que debe ser, como una dimensión de lo que es: «en la racionalidad teórica [en particular], el bien y el mal son la verdad y la falsedad» (*EN*, VI 2, 1139a28-29). De ahí que el propósito primordial de la filosofía aristotélica de la ciencia no sea uno que hoy parece obligado, la descripción o la justificación de las técnicas de investigación dominantes en la práctica de una disciplina. No lo es, en parte, por motivos de hecho: sólo años después de muerto Aristóteles y al abrigo institucional del Museo de Alejandría, podrá hallarse tal vez algo parecido a una disciplina científica o a una comunidad de practicantes de una disciplina científica. Pero no puede serlo sobre todo por razones de principio: una descripción de la ciencia como aquéllo que los científicos hacen o producen sería, desde un punto de vista aristotélico, una noción más bien insustancial. Aristóteles se interesa ante todo por las condiciones mismas de un modo de conocimiento y por la adecuación del método de investigación a la naturaleza propia del objeto de estudio y al género de cosas involucrado.

Quizás, en último término, lo que más separe la metodología aristotélica de nuestra filosofía de la ciencia sea una cuestión de perspectiva ontológica. A juicio de Aristóteles, lo que hay primordialmente son cosas y formas o aspectos de darse las cosas —esta variedad se trasluce en el lenguaje: el ser se dice de diversas maneras—. Las cosas se agrupan por géneros y cada uno de ellos es el objeto propio de una ciencia. Por otra parte, si a la luz de la *Metafísica* Γ 2 los modos de significar lo que es remiten a un sentido focal y primario *[pròs hén]* de ser, el conocimiento de lo que hay descansa en

sus principios constituyentes, en un orden inteligible y necesario de ser, cuya exploración analítica compete a una filosofía primera. Los supuestos de la filosofía moderna y contemporánea de la ciencia suelen ser muy distintos: lo que hay, de entrada, son maneras de decir cómo son las cosas (de modo que no caben más equívocos que los lingüísticos) o cómo concebimos el mundo; una de estas maneras es la científica, la inherente a las teorías y los métodos científicos (la prácticada por las comunidades científicas). Esta perspectiva no se abre a una filosofía primera sino a lo sumo a una teoría del conocimiento científico o una lógica del lenguaje de la ciencia; y lo que es, lo que hay, guarda relación ante todo bien con nuestra forma de conocer, bien con unos compromisos implícitos en el lenguaje empleado o con unas decisiones ónticas que acotan su alcance referencial. Más adelante veremos cómo ese sustrato ontológico de la concepción aristotélica se refleja en su concepción de la demostración como modelo de discurso racional al dar cuenta y razón de que las cosas son —en sí mismas— como son y no pueden ser de otra manera.

1.1

La teoría aristotélica de la demostración se halla expuesta en dos tratados del Organon, los llamados *Primeros y Segundos Analíticos*. Los *Primeros Analíticos* se abren precisamente con esta declaración: «Digamos para empezar cuál es el objeto y el dominio de nuestra investigación: versa sobre la demostración *[perì apódeixin]* y es de la ciencia demostrativa *[epistémes apodeiktikés]*» (*APr.* I 1, 24a10-11). La referencia a un objeto y un dominio de investigación no debe llevar a engaño. La investigación emprendida en los *Analíticos* no corresponde a una disciplina dotada de contenido propio; no representa una investigación filosófica ni, menos aún científica. No hay una ciencia de la demostración o de la ciencia demostrativa (Platón ya había apuntado en el *Cármides*, 175b-c, que en general no puede haber una ciencia tal como la ciencia de la ciencia). Se trata más bien de un análisis lógico y metodológico que únicamente tiene carácter instrumental: constituye una especie de conocimiento propedéutico y técnico del que conviene disponer con miras a la investigación sustantiva, filosófica o científica, propiamente dicha; y, sobre todo,

suministra el canon que preside y normaliza la exposición racional de los resultados establecidos al cabo de esa investigación [1].

Tampoco debe inducir a error la calificación de *Primeros y Segundos* con que se distinguen los dos tratados. Ninguno de ellos fue concebido para ser publicado bajo la forma como hoy los conocemos. Es posible que originariamente procedan de «seminarios» —digamos— dados por Aristóteles en el círculo de la Academia platónica para un público relativamente preparado. Ahora son la cristalización final, irremediable, de un asentamiento conceptual estratificado en el que Aristóteles, sobre una concepción primeriza del conocimiento demostrado, parece haber superpuesto nuevas ideas, añadido mayores precisiones y avanzado otros desarrollos no siempre congruentes con las sugerencias anteriores. No cabe entender que los *Segundos Analíticos* fueran escritos en bloque después de **terminados** los *Primeros*. Los dos tratados forman una unidad sustancial de enfoque y de propósito, y el único orden cronológico razonable sería el que se pudiere establecer entre pasajes determinados de uno y otro.

Sin embargo, hay una distribución de tareas entre ambos. Los *Primeros Analíticos* se ocupan más bien de la estructura lógica de la demostración. Toda demostración envuelve una deducción lógicamente válida y concluyente. Las demostraciones directas, en particular, revisten una forma lógica característica: la forma de **silogismos**, i.e. la forma de los esquemas deductivos que componen el sistema lógico aristotélico. Ahora bien, el ámbito lógico de referencia de los *Primeros Analíticos* excede del cubierto por la demostración, «pues la demostración es un silogismo, pero no todo silogismo es una demostración» (*APr.* I 4, 25b30-31). En este contexto, hemos de entender por «silogismo» la deducción lógicamente válida en general y, naturalmente, entre las deducciones válidas podemos encontrar no sólo demostraciones directas, demostraciones propiamente dichas, sino argumentos dialécticos o deducciones a partir de hipótesis como la reducción al absurdo. Por ende, los rasgos distintivos

---

[1] Esta contribución analítica está incluida tradicionalmente en la parte del corpus aristotélico denominada *Organon* (instrumento); los comentaristas responsables en última instancia de tal denominación, Alejandro de Afrodisia y Juan Filopón, la aplicaban más bien al contenido de los *Analíticos*. «Análisis», en este contexto, significa ante todo reducción (resolución) de lo conocido a (en) sus elementos y principios de reconocimiento como objeto de saber.

de la demostración no son precisamente de orden lógico: la validez es a lo sumo una condición necesaria pero insuficiente. La demostración, aparte de la condición lógica de tener —o ser reducible a— una forma silogística, debe cumplir otras condiciones epistemológicas y metodológicas. De ellas se ocupan los *Segundos Analíticos.* Una es, por ejemplo, la condición de contar con determinado tipo de premisas: las que consisten en verdades necesarias y capaces de explicar por qué lo establecido en la conclusión es así y no puede ser de otra manera. Otro requisito de la demostración es pertenecer a un cuerpo de conocimientos deductivamente ordenado, «axiomatizado». El estudio de la concepción aristotélica de la demostración ha de atenerse por lo menos a estas tres dimensiones básicas y solidarias: las dimensiones lógica, epistemológica y metodológica.

La neblina cronológica que envuelve los *Primeros* y *Segundos Analíticos* no da muchas facilidades para adivinar el proceso seguido por la investigación aristotélica. Pero tampoco nos faltan motivos para imaginar un curso de pensamiento parecido a éste [2]: Es probable que Aristóteles partiera de ciertas preocupaciones y temas de discusión presentes en la Academia: las condiciones del discurso racional, la posibilidad de la demostración misma, el orden deductivo del conocimiento. Al estudiar estas cuestiones, Aristóteles pudo for-

[2] El desarrollo del pensamiento aristotélico en lógica y metodología fue un tema planteado por F. Solmsen: *Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rethorik* (Berlin, 1929), al calor de la interpretación evolutiva de la formación de la filosofía de Aristóteles —a partir de una matriz platónica— con la que Werner Jaeger (1923): *Aristóteles,* México, 1946, reedic. post.) revolucionó la historiografía aristotélica en el primer tercio del siglo. Solmsen sugería sustancialmente este orden de composición: *Tópicos,* I-VII; *Segundos Analíticos,* I; *Tópicos,* VIII-IX (*Refutac. Sofísticas); Segundos Analíticos,* II; *Primeros Analíticos.* Años más tarde apareció una revisión crítica de D. Ross (1939): «The discovery of the syllogism». En las pp. 6-23 de su influyente edición: *Aristotle's Prior and Posterior Analytics* (Oxford, 1949), Ross volvió sobre la cuestión y su oposición a una matriz platónica del desarrollo aristotélico generó una especie de ortodoxia contraria a la parcelación evolutiva del pensamiento aristotélico en general. Pero, hoy en día, el *Entwicklungsproblem,* aunque *démodé,* sigue siendo una cuestión abierta. Véanse, e.g., E. Berti: *La filosofia del primo Aristotele* (Padova, 1962), pp. 93 ss.; V. Sainati (1968): *Storia dell'Organon aristotelico,* o.c., I, pp. 229-30 en especial; J. Barnes, «Introduction» a su edic. (1975): *Aristotle's Posterior Analytics,* pp. xiii-xiv; algunas sugerencias de J. Brunschwig: «L'object et la structure des Seconds Analytiques d'après Aristote», en E. Berti, ed. (1981), o.c., pp. 61-96; el propio Barnes hace aquí una revisión general del problema y de otros conexos: «Proof and the syllogism», *ibd.,* pp. 17-59; hay, en fin, algún otro aspecto considerado en R. Smith (1986): «Inmediate propositions and Aristotle's proof theory», art. c.

marse una primera idea de la demostración y de la ciencia demostrativa, una primera *apodíctica* cuya flexible lógica informal se avenía a la dialéctica de los *Tópicos* y a su noción genérica de deducción. De esta fase inicial procederían ciertas asunciones de los *Segundos Analíticos* que parecen anómalas en el marco de la silogística sistemática de los *Primeros* (e.g.: el reconocimiento de demostraciones a partir de premisas que valen sólo «para la mayoría de los casos», o la inclusión entre los principios *[arkhaí]* de proposiciones con la engañosa traza de «enunciados existenciales puros» como «hay unidades», «hay magnitudes»). Por otro lado, seguramente más tarde, llegó a convencerse de algo que la geometría mostraba y afloraba también en su análisis lógico de la oposición: la idea de que las proposiciones más dignas de interés —desde un punto de vista epistemológico y desde un punto de vista lógico— son las que consisten en afirmar o negar un término general de otro término general tomado universal o parcialmente. Siguiendo por esta línea, Aristóteles llegó a hacerse con un patrón bastante preciso de la argumentación concluyente, el silogismo, que le permitió revisar críticamente otras alternativas metódicas practicadas en el medio académico: e.g. la dialéctica platónica o el método de división (es sintomático su cambio de opinión acerca de la importancia de la captación dialéctica de conexiones esenciales y acerca del papel que desempeña la definición, a medida que va perfilando la idea de la demostración silogística [3]). Imagino que Aristóteles está viviendo por entonces sus últimos años de vida «académica» (en torno al 350 a.n.e. y siguientes). Luego —probablemente— Aristóteles se rindió por un tiempo a los encantos de su invención del silogismo y halló la ocasión de detenerse a elaborar un sistema canónico, la silogística de los *Primeros Analíticos*, compuesto por modos de deducción no sólo válidos sino además capaces de convalidar cualquier argumentación concluyente y de interés para el conocimiento científico (pues «es necesario que en toda demostración y en todo silogismo se pruebe que un predicado se aplica o no a un sujeto, sea universal o sea parcialmente», *APr.* I 23, 40b23-25). Es de suponer que Aristóteles, por último, procurara integrar los resultados de estas líneas de análisis, la que conducía a los supuestos epistemológicos y metodológicos de la idea de demostración y la que investigaba sus supuestos lógicos, en un

[3] Vid. A. Mansion: «L'origine du syllogisme et la théorie de la science chez Aristote», en Mansion, ed. (1961, 1980), o.c., pp. 57-81.

programa coherente acerca de lo que cabía considerar como la forma óptima del discurso racional: el conocimiento expuesto en los términos de una ciencia demostrativa. La expresión de tal programa es la teoría apodíctica del libro I de los *Segundos Analíticos.* Es natural así que esta teoría madura de la demostración funde expresamente algunos de sus rasgos distintivos sobre una base silogística estricta, e.g.: en esta lógica descansa la exigencia de que la demostración científica ha de contar en último término con premisas inmediatas o la condición de que una ciencia demostrativa ha de consistir en una cadena finita de predicaciones. Por otra parte, también es razonable que al mayor peso del sistema silogístico corresponda un relativo distanciamiento de las primeras fuentes contextuales de inspiración, matemáticas y dialécticas, y un mayor énfasis programático. Con todo, en la versión final de los *Analíticos*, es la lógica silogística la que cobra sentido en el marco de la idea programática de demostración científica y no es esa idea de demostración la que adquiere su significado peculiar a la luz de la silogística —aunque se deje iluminar por ella y un fruto de esta iluminación sea la precisión de algunos rasgos estructurales de la ciencia demostrativa—.

Este esbozo de *Entwicklungsgeschichte* no pasa de ser, desde luego, mera conjetura. Puede que tenga que ver con «esa necesidad barroca de la inteligencia que la lleva a rellenar cualquier hueco» (según confiesa Julio Cortázar en *Tango de vuelta*). Pero es una conjetura verosímil y, sobre todo, ayuda a comprender la formación de dos características relevantes de la concepción propuesta en los *Analíticos:*

a) El sistema silogístico presentado en los *Primeros*, pese al interés que concita en sí mismo como teoría de la deducción lógica —la primera conocida—, no es sino una lógica subyacente en la ciencia demostrativa que consideran los *Segundos.* En calidad de lógica subyacente, le silogística de Aristóteles envuelve una noción característica de consecuencia lógica, y consiste en:

(i) un lenguaje normalizado, que cuenta con un dominio no vacío de aplicación de sus términos y sus enunciados esquemáticos, y

(ii) un sistema de deducción capaz de convalidar todas las deducciones formulables en el lenguaje del sistema, toda demostración silogística.

b) El motivo primordial de la concepción aristotélica, en su conjunto, no es la lógica del silogismo ni una metodología axiomática, sino la idea misma de demostración científica. De momento, podemos entender por **demostración** *[apódeixis]* la exposición argumen-

tada y lógicamente concluyente de por qué un tipo de cosas es tal como es y nunca podrá ser de otra manera. Una **ciencia demostrativa** *[espistéme apodeiktiké]* es un conjunto finito y ordenado de demostraciones que versan sobre un sector determinado de la realidad. Y, en suma, una argumentación es una **demostración científica** si es una demostración directa que forma parte de una ciencia como la descrita. Pues bien, la idea de demostración científica es el eje principal de esta reconstrucción, es la que ante todo determina las peculiaridades lógicas y metodológicas de la concepción aristotélica, como luego tendremos ocasión de comprobar, en vez de ser una noción predeterminada por su vinculación a un contexto sistemático de carácter lógico o de carácter metodológico (e.g.: por constituir una deducción dentro del sistema silogístico o por significar un nudo de la malla axiomática de una teoría científica).

La característica **a)** parece aproximar el planteamiento de los *Analíticos* a la metodología contemporánea de la ciencia, uno de cuyos empeños distintivos es el análisis de la lógica subyacente en las teorías científicas —entendiendo por una «teoría» un conjunto de proposiciones parcialmente ordenado y cerrado con respecto a una relación de consecuencia lógica entre ellas—.

El rasgo **b)**, en cambio, aleja de los *Analíticos* cualquier pretensión de modernidad: desde el s. XVII, cuando menos, se empieza a definir el concepto de demostración en función de una metodología axiomática o de una teoría lógica, como un elemento derivado de la estructura del sistema antes que a la inversa, y esta tendencia se ha ido acentuando con el paso del tiempo hasta culminar en lo que hoy entiende por «demostración (proof)» la llamada «proof-theory» de la metodología formal de los sistemas y las ciencias deductivas.

1.2

La noción anterior de «demostración científica» (exposición argumentada y lógicamente concluyente de por qué un tipo de cosas es como es y no puede ser de otra manera) no pasa de dar una idea preliminar y aproximada de la concepción aristotélica. En principio, todo el mundo la suscribiría. Peo esto no es un síntoma de la vigencia secular de Aristóteles, sino de la vaguedad de esa primera aproximación a su pensamiento. Para corregir falsas impresiones hemos de caracterizar la teoría aristotélica de la demostración en tér-

minos más apurados y precisos. Sin embargo, tampoco conviene concebir falsas esperanzas. Así que empezaré recordando algunas dificultades que limitan el alcance de una interpretación o una reconstrucción. Adelanto que la teoría aristotélica de la demostración envuelve vaguedades y ambigüedades irreducibles. Alguna de ellas es sustancial en la medida en que afecta a su sentido y a su significado, al espíritu y a la letra de los *Analíticos:* ambos aspectos se prestan a discusión y, de hecho, no han dejado de plantear desde antiguo bastantes problemas hermenéuticos.

Valgan, como ilustración, algunas cuestiones textuales y contextuales. Ya he aludido a las circunstancias que rodean la «edición» de los *Analíticos*, en forma de tratados, a raíz de lo que podría haber sido la «publicación» originaria de algunas de estas ideas: la lectura por parte de Aristóteles de una serie de análisis y avances manuscritos ante un grupo reducido de oyentes, en la Academia, de modo parecido a como hoy se haría en el curso de un seminario. La situación ha llevado a J. Barnes, editor de una escrupulosa versión inglesa de los *Segundos Analíticos*, a asegurar que la tarea de un comentador de esta obra es discernir lo que efectivamente pudo haber dicho Aristóteles y, en definitiva, «escribir el libro por él» (*Aristotle's Posterior Analytics.* Oxford, 1975; Introduction, p. xii.) A estas circunstancias se añaden otras dificultades internas, derivadas de la propia índole del lenguaje aristotélico. Es un lenguaje conceptual —una escritura filosófica— en proceso de elaboración y esta elaboración no se limita a verter nuevos significados en viejos términos; también consiste en acuñar nuevas fórmulas e imponer al lenguaje común giros artificiosos más acordes con la significación técnica que se quiere conseguir. Pero, naturalmente, ninguna de estas empresas supone abandonar la matriz del lenguaje usual ni otros varios legados —filosóficos, dialécticos—; y el empeño aristotélico de fijar una escritura conceptual limpia, precisa y ajustada al fin estricto del conocimiento, sin poder disponer de una conceptografía formalizada —ni siquiera soñarla—, tiene todos los visos del recurso obligado a un trapo sucio para limpiar la plata. Los trances de este tipo, la creación de nuevos términos y la forja de nuevos objetos de pensamiento, no hacen que la aventura sea desesperada aunque sí le dan el perfil incierto e inacabado de un discurso en construcción. De hecho, el trabajo de precisión dentro de un lenguaje heterogéneo, informal y poco dado a labores analíticas —a pesar de la mediación de los primeros sofistas, los erísticos, o el mismo Platón—, que es

el marco discursivo del que parte Aristóteles, no puede evitar desplazamientos y equívocos que obligan a una lectura cautelosa incluso de los términos y de las claúsulas que consideraríamos más técnicos. Puede servir de muestra el uso de un término tan nuclear en la teoría de los *Analíticos* como «silogismo *[syllogismós]*».

«*Syllogismós*» significa en principio razonamiento, inferencia o argumentación en general, según conviene a su relación con «*syllogídsomai*» (razonar, recapitular, inferir). Esta acepción genérica engloba dos aspectos que hoy podemos discernir: el inferencial y el argumentativo. Una inferencia es antes que nada un proceso psicológico e intencional de razonamiento, mientras que la argumentación es más bien la expresión lingüística de ciertas inferencias. Este doble sentido usual, presente en Platón (e.g. *Theeteto*, 186d: «el conocimiento no descansa en las impresiones recibidas, sino en la inferencia *[syllogismô]* a partir de ellas») es frecuente en la *Retórica* aristotélica aunque Aristóteles suele marcar más el aspecto argumentativo: «Cabe argüir *[syllogídsesthai]* e inferir conclusiones *[synágein]* bien a partir de cosas previamente argumentadas, bien a partir de cosas que no se han argumentado a pesar de que precisarían argumentación *[syllogismoû]* por no ser admitidas» (*Rh.* I 2, 1357a8-10; vid. también I 10, 1368b2; I 11, 1371b9). «*Syllogismós*» contrae ya una acepción dominante de argumentación —antes que inferencia o razonamiento— en el contexto de la clasificación de los *Tópicos* I 1, 100a28 ss., donde se distinguen clases diversas de silogismos: demostrativos, dialécticos, erísticos y paralogismos (puede verse también *S.E.*, 165b1 ss.).

En los *Analíticos* es obvia la intención de dar al término un sentido más técnico. Aquí un silogismo es ante todo un argumento deductivo (e.g. en *APo.* I 1, 75a5-10, los argumentos deductivos se identifican como *logoi syllogismôn* frente a los inductivos, *lógoi di'epagogês,* y los retóricos, *lógoi rhetorikoì;* cf. sin embargo *APr.* II 23, 68b10-15, donde se sigue hablando de «silogismos inductivos» y «silogismos retóricos»). Pero dentro de ese ámbito más específico de significado, «*syllogismós*» continúa siendo equívoco. Podemos apreciar dos usos, uno relativamente amplio y otro más bien estricto.

En el primero, digamos «*silogismo*$_1$», designa la argumentación deductiva lógicamente válida. Tal es su significado por ejemplo en *APr.* I 1, 24a26-31, cuando se hace referencia a los silogismos demostrativos y los silogismos dialécticos: no difieren entre sí por su forma lógica, pues en ambos casos se obtiene una consecuencia si-

logística partiendo de la asunción de que un predicado se aplica o no a un sujeto, sino por la índole de sus respectivas premisas: en los silogismos demostrativos las premisas son asertos que constituyen verdades primordiales o se fundan en verdades de este tipo; las premisas de los dialécticos son opiniones autorizadas o proposiciones plausibles que responden a un interrogante o a un tema de discusión. Aparte de este uso implícito, la noción de *silogismo*$_I$ aparece definida tanto en los *Tópicos* como en los *Analíticos*. En tales definiciones cobra la connotación cognoscitiva de argumentación lógicamente concluyente en orden a dar razón de que algo es el caso. Hay, no obstante, una diferencia de matiz entre ambas. Reza la definición de los *Tópicos*: «Un silogismo es un discurso en el que sentadas ciertas cosas se da conjuntamente de necesidad, a través de lo establecido, algo distinto de lo establecido» (I 1, 100a25-27). Y la de los *Analíticos:* «Un silogismo es un discurso en el que sentadas ciertas cosas se dan conjuntamente de necesidad algo distinto de lo establecido por ser esto así. Digo "por ser esto así" al darse conjuntamente en virtud de ello, y entiendo con esto que no es preciso ningún otro término para hacer la conclusión necesaria» (*APr.* I 1, 24b18-23). En suma, el *silogismo*$_I$ tiene los rasgos siguientes:

a/ Es un argumento deductivo lógicamente válido pues envuelve una relación de consecuencia (para la que Aristóteles carece de formulación directa como nuestro «se sigue lógicamente»; en su lugar emplea la fórmula «se da conjuntamente de necesidad /*ex anánkes symbaínei*/»)

b/ Tiene un propósito cognoscitivo o informativo: depara el conocimiento de que algo es el caso, siendo esto distinto de lo ya sentado o conocido;

c/ Procede sobre la base de las premisas justamente pertinentes: cada una de ellas es necesaria y todas ellas son en conjunto suficientes para establecer la necesidad de la conclusión: el énfasis sobre la pertinencia de las premisas es el matiz distintivo de la definición de los *Analíticos* y se ve corroborado por otros pasajes (e.g. *APr.* I 32, 47a17-28). Esta connotación da a la noción de deducción válida que maneja Aristóteles un aire un tanto peculiar. Aristóteles asegura que de dos premisas α_1 y α_2 verdaderas se deduce lógicamente una conclusión β necesariamente verdadera, pero si β es falsa entonces una al menos de esas dos premisas tiene que ser falsa; ahora bien, si α_1 y α_2 no son verdaderas ambas, β podrá ser a su vez verdadera pero no necesariamente sino al albur de las circunstancias. Todo esto es

normal. Lo que ya no parece tan normal es la justificación que aduce Aristóteles de este último caso. Supongamos que α_1 y α_2 no son verdaderas ambas porque una de estas premisas es la negación de la otra; entonces, dice Aristóteles, un estado de cosas como el representado por «β» nunca podrá ser consecuencia necesaria de otro estado de cosas, digamos «α_1», y de su contrario, «α_2» (equivalente a la negación de «α_1»). La prueba que ofrece Aristóteles de esta imposibilidad (*APr.* II 4, 57a36-b7) viene a discurrir como sigue: si de α_1 se deduce β, de no-β se deduciría no-α_1; pero β también se suponía conclusión de α_2 (i.e. de no-α_1); así pues, por transitividad, de no-β se deduciría β, lo cual es absurdo (*[toûto dè adýnaton]*, 57b14). La razón de que Aristóteles considere absurda la legitimidad de una deducción de la forma «si no-β, entonces β» no puede ser otra que la pertinencia fuerte, directa y explicativa que prevé entre las premisas y la conclusión del silogismo. Reparemos de paso en que algunas pruebas apagógicas (como la que Aristóteles mismo había aducido en el *Protréptico* para mostrar que la necesidad de la filosofía se seguía incluso de la negativa a filosofar) ya no serían deducciones silogísticas en este sentido amplio de silogismo$_1$.

«Silogismo» en un sentido aún más restringido, digamos como «*silogismo*$_2$», designa un modo del sistema lógico aristotélico expuesto en los cc. iniciales de los *Primeros Analíticos*, un esquema deductivo de la **silogística**. Todo argumento que sea instancia de un esquema deductivo de este sistema es lógicamente válido. Por ende, un *silogismo*, en este sentido, es un criterio sistemático de convalidación lógica. Es decir, sea A un argumento cualquiera: entonces A es un silogismo$_1$, es una deducción lógicamente válida, si A reviste la forma de un silogismo$_2$ o de una cadena de silogismos$_2$. Aristóteles distingue además entre silogismos$_2$ perfectos *[téleioi]* e imperfectos (*APr.* I 1, 24b22-26): es perfecto el que manifiesta su propia validez de modo que nada más requiere para hacer saber que se trata de una deducción lógica y necesariamente concluyente; es imperfecto el que requiere una especie de reelaboración o reducción para evidenciar esa misma condición. Si el silogismo$_2$ representa un criterio o un canon sistemático de convalidación, su significado es más restrictivo que el del silogismo$_1$, pues conlleva una especie de gramática lógica y una determinada teoría de la deducción —en la que por cierto desempeña un papel importante la distinción anterior entre silogismos perfectos e imperfectos— y, por consiguiente, impone una normalización o «regimentación» al discurso lógicamente con-

cluyente. Todo esto incide sobre la teoría aristotélica de la demostración. Un supuesto de la teoría es la tesis de que toda demostración científica es un silogismo, es un argumento que prueba de modo pertinente la necesidad de su conclusión. Ahora bien, el alcance de esta tesis resulta bien distinto según que nos atengamos al silogismo$_1$ o al silogismo$_2$. En el primer caso cabría reconocer deducciones de una forma lógica completamente ajena o irreducible a la de los esquemas convalidables por el sistema silogístico —por ejemplo, deducciones fundadas en relaciones de «más/menos» (*Top.* II 10, 114b38-115a14) o en ciertos supuestos de una lógica de la identidad: «todo lo que conviene a una de dos cosas [idénticas] es necesario que convenga así mismo a la otra... y si algo no corresponde, es evidente que no son idénticas» (*Top.* VII 152a33-37)—. Los *Analíticos* se inclinan por la opción más fuerte y restrictiva: toda demostración científica es un silogismo$_2$ —o, como ya he adelantado, la silogística de los *Primeros* es la lógica subyacente en los *Segundos*—, a pesar de que Aristóteles no es insensible a la dificultad de calzar en esta horma algunas demostraciones (matemáticas, sin ir más lejos).

La opción de los *Analíticos* por una forma silogística canónica de la demostración científica propiamente dicha suscita a su vez nuevos problemas de comprensión y de interpretación. Problemas que ahora tienen que ver con el contexto más que con el texto y quizás con el espíritu antes que con la letra. Por ejemplo, Aristóteles bien pudo inspirarse en las prácticas contemporáneas, dialécticas y demostrativas —e.g. geométricas— para la noción de silogismo$_1$. Ahora bien, ¿cuál pudo haber sido la fuente de inspiración de su peculiar silogismo$_2$? Es muy posible que no debamos buscar una fuente única y tengamos que reconocer la confluencia, a través de la idea primordial de silogismo$_1$, de diversos motivos (filosóficos, dialécticos, matemáticos), así como la originalidad del análisis lógico aristotélico: ambos aspectos se hallaban presentes, como ya hemos visto, en la teoría de la oposición y ésta proporciona algunos de los supuestos operativos de la silogística de los *Primeros Analíticos*? Pero, en cualquier caso, ¿qué puede significar la tesis de que toda demostración científica reviste esa singular forma lógica, cuando lo cierto es que no hay más rastro de una prueba de esta guisa que los contados ejemplos, triviales y ad hoc, que ofrecen los *Analíticos*? Uno de estos ejemplos, construido sobre la base de *APo.* II 16, 98b36-40, sería el siguiente: «Es necesario que todo árbol al que se le coagule la savia pierda las hojas; es necesario que a todo árbol de tal o cual especie

(e.g. a las higueras) se le coagule la savia; luego, es necesario que todo árbol de dicha especie (toda higuera) pierda las hojas». Este capítulo, II 16, de los *Segundos Analíticos* es seguramente el más explícito al respecto y las muestras que aduce son tan enjundiosas como el ejemplo anterior: prueban que toda vid es de hoja caduca por ser de hoja ancha o que todo eclipse lunar se produce por quedar interpuesta la tierra. No parece que las demostraciones de este tenor sean el gozo y la corona de la investigación científica o filosófica del s. IV a.n.e. En todo caso, el problema de la aplicación de la silogística a la práctica real de la demostración seguirá siendo una cruz para algunos comentadores aristotélicos como Alejandro de Afrodisia.

La cuestión se puede plantear en términos más crudos: si los *Analíticos* se hubieran perdido, el resto del corpus aristotélico no nos daría motivos para barruntar el papel normativo atribuido a la silogística, ni el ideal de una ciencia demostrativa esencialmente compuesta por silogismos.

Esto no significa que la investigación aristotélica real no esté presidida por consideraciones metodológicas, algunas de ellas avanzadas en los *Analíticos*. Por ejemplo, el plan de investigación causal propuesto en *APo.* II 8, 93a15 ss., o las relaciones entre las definiciones y la prueba explicativa sugeridas en *APo.* II 10, 94a11-14, no dejan de reflejarse de algún modo en la física y en la biología aristotélicas. Pero la suerte real del programa canónico, de la teoría de la ciencia demostrativa estricta que propugna el libro I de los *Segundos Analíticos*, no es la misma que la conocida por otras sugerencias informales —como las citadas— o por otras consideraciones ocasionales en torno a los modos de demostración y de explicación causal.

Más adelante tendremos ocasión de volver sobre esta curiosa afección de a-contextualidad de la que adolece la doctrina aristotélica más estricta —la montada sobre la base del silogismo$_2$— acerca de la demostración científica por antonomasia, en el marco general de la investigación científica y filosófica griega. Naturalmente, de esta cuestión depende en buena parte el sentido que hayamos de atribuir al programa aristotélico. Pero antes de abordar este punto y sus consecuencias, necesitamos más información; para empezar, sobre el concepto mismo de silogismo$_2$ y sobre el cometido de la silogística.

2. *La dimensión lógica de la idea de demostración.*

Como ya he señalado, la dimensión lógica de la idea aristotélica de demostración científica consiste en suponer que toda demostración científica reviste una forma lógica peculiar, la forma de un silogismo$_2$, i.e. la forma de un esquema deductivo perteneciente al sistema silogístico que proponen los cc. 1, 2 y 4-6 de los *Primeros Analíticos.* Este sistema constituye la silogística no modal («asertórica» o «categórica») de Aristóteles.

Hay motivos ontológicos y epistemológicos en la idea aristotélica de demostración que le añaden una connotación modal. A ellos obedece la exigencia de que, entre las premisas de una demostración científica, haya de haber en principio proposiciones necesarias o proposiciones que conlleven una predicación universal en este sentido estricto: «Llamo universal *(kathólou)* al predicado que conviene al sujeto en cada caso y esencialmente y en cuanto tal; así pues es obvio que tales universales son necesariamente inherentes a sus sujetos» (*APo*, I 4, 73b26-28). Cabría pensar entonces en que la lógica de la demostración consiste en la silogística modal. Sin embargo, esas connotaciones modales no alteran sustancialmente la suposición aristotélica de que la silogística «asertórica» constituye la lógica subyacente en la teoría de la demostración de los *Segundos Analíticos.* De hecho, pese a la distinción entre la predicación meramente universal *[katá pantós]* y la predicación necesaria [*kath' autó*] (vid. *APo.* I 4, 73b25-28), Aristóteles ejemplifica la primera en términos que ilustran igualmente la conexión esencial inherente a la segunda, e.g. «todo hombre es animal», «toda línea contiene un punto». Por otra parte, la lógica de una demostración a partir de premisas necesarias es similar a la lógica de una demostración pareja a partir de asertos universales (*APr.* I 8, 29b35-37). Estas y otras consideraciones —como el carácter subsidiario de la silogística modal que ofrece Aristóteles en *APr.* I 8-22, la constitución no poco problemática (a veces incoherente) de su análisis de las modalidades y, en fin, las motivaciones más filosóficas que lógicas o metodológicas de este análisis— permiten, creo, relegarla ahora a un segundo plano [4].

---

[4] Vid. W. y M. Kneale (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica*, II. 7, pp. 78-91. J. Hintikka (1957): «Necessity, Universality, and Time in Aristotle», recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1979), o.c., pp. 108-124; M. Mulhern (1969): «Aristotle on universality and necessity», l.c., pp. 288-299; J. Hintikka (1973): «On

A la noción de silogismo$_2$ habíamos llegado considerando la ambigüedad del uso aristotélico de «*syllogismós*». Naturalmente, no podemos esperar que esta misma noción y, en general, el desarrollo del sistema silogístico se vean completamente libres de equívocos. Aristóteles no cuenta, desde luego, con un lenguaje lógico formalizado y, por otro lado, su presentación de la silogística tampoco tiene el grado de precisión y de coherencia en todos sus extremos que, aun informalmente, sería de desear.

Por ejemplo, la noción misma de silogismo que se adecua a este contexto —i.e. el silogismo$_2$ (de aquí en adelante toda mención simple de «silogismo» se referirá al silogismo$_2$, de modo que prescindiré de este subíndice)— envuelve cierta vaguedad: en algunos pasajes puede entenderse como un enunciado compuesto condicional de la forma «si... y ..., entonces...» que constituye una implicación válida (e.g. *APr.* II 11, 61b33-35), así que la silogística resulta un sistema «axiomático» de tesis o «verdades» lógicas; pero otros pasajes inducen a considerarlo como un esquema argumental de la forma: «si es el caso de que... y el caso de que..., se sigue por ende necesariamente que también es el caso de que...», y la silogística viene a ser entonces un sistema «natural» de pautas o esquemas lógicos de deducción (e.g. *APr.* I 4, 25b30-31; 25, 41b36 ss.; 31, 46a33-35). No acaban ahí todas las ambigüedades. A esta relativa indeterminación textual se ha sumado luego una discusión hermenéutica que lejos de remitir con el tiempo no cesa de actualizarse. De hecho, cabe tomar la reconstrucción de la gramática y de la estructura lógicas de la silogística como una especie de *crux interpretationis* para la historiografía de la lógica; podríamos describir por relación a ella las diversas tendencias y las innovaciones historiográficas cruciales en este campo. Así: la tradición proveniente de C. Prantl (1855-1870) y el neotradicionalismo de A. Dumitriu (1969, 1975); la historiografía moderna instaurada por J. Łukasiewicz (1934; 1951), luego representada por Bochénski (1951, 1956), Patzig (1959) y los Kneale (1961); y en fin la revisión ulterior, «postmoderna», a partir de la década de los 70 —e.g.: T. J. Smiley (1973), J. Corcoran (1973; 1974), M. Frede

Aristotle's modal syllogistic», en *Time and Necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality*, o.c., pp. 135-46. La dificultad de conciliar los diversos principios lógicos modales que reconoce Aristóteles es una de las que minan los ensayos de reconstruir sistemáticamente su lógica modal de forma similar a la sistematización de la lógica categórica, e.g. como ha intentado S. McCall: *Aristotle's Modal Syllogisms* (Amsterdam, 1963).

(1974)—. Son todas ellas variantes que se definen por la manera de entender la silogística al tiempo que entrañan, expresa o tácitamente, puntos de vista más generales sobre la manera de practicar la historiografía de la lógica [5]. En otras palabras, tanto la historia de la lógica misma como la discusión de su historiografía bien pueden empezar por la «A» de Aristóteles.

Con tales antecedentes, sospecho que no procede una pregunta del tenor de «¿cuál es, en definitiva, la **naturaleza genuina** del silogismo aristotélico?» y supongo que, al menos de momento, habremos de conformarnos con una caracterización de rasgos típicos razonablemente aproximada. Este es el sentido de la reconstrucción de los elementos, configuración y estructura del sistema silogístico que voy a proponer.

2.1 *Elementos del sistema.*

La silogística no modal de los *Primeros Analíticos* contiene elementos de tres tipos:

—Esquemas de términos consistentes en ciertas letras del alfabeto griego (alfa, beta, gamma; my, ny, xi; pi, rho, sigma); Aristóteles se sirve de estas letras para ocupar el lugar que corresponde a los términos en un esquema enunciativo, pero su uso resulta un tanto ambiguo: es a veces el de una variable propiamente dicha y es otras veces el de una denominación genérica abreviada, de modo semejante a como los geómetras de su tiempo hablan del segmento AB o del triángulo ABΓ para referirse a un segmento o triángulo dado cualquiera —Aristóteles estaba familiarizado con este uso informal de las letras en geometría, vid. por ejemplo *EN.* V 4, 1132b5-9.

—Esquemas enunciativos o apofánticos de una de estas cuatro formas: «A se predica de todo B», «A se predica de ningún B», «A se predica de algún B», «A no se predica de algún B», donde «A» y «B» son letras esquemáticas de términos generales y «se predica

[5] He desarrollado esta apreciación en mis «La historia de la lógica y el "caso Aristóteles"», *Llull,* 5 (1983), pp. 175-207, y «De la condición de la lógica y el ejercicio de su historia» en *Actas I Simposio Hispano-Mexicano* de filosofía (1984), Salamanca, 1986, vol. II, pp. 170-90. Del relativo consenso ahora logrado en torno a la índole de la silogística aristotélica pueden dar idea muestras tan variadas como J. Lear (1980): *Aristotle and Logical Theory,* y P. Thom (1981): *The Syllogism,* oo.cc.

de» quiere ser una lectura genérica de las cláusulas aristotélicas: «*to B tò A hypárkhei* (A pertenece, conviene a B)» «*tó A toû B kategoreîtai* (A se dice, predica de B)» —es claro que «A» oficia de predicado *[kategoroúmenon]* y «B» de sujeto [*tò kathoû kategoreîtai]*; lo que ya no está claro es el sentido lógico (e.g.: extensional o intensional) de la predicación a pesar de que el texto introduce giros como «*to B tò A hypárkhei*» que podrían considerarse «técnicos» al ser construcciones artificiales o forzadas en el contexto usual de la lengua griega; en todo caso, la lectura en términos de predicación está autorizada (vid. por ejemplo *APr.* I 1, 24b26-30). Para abreviar la referencia a estos esquemas apofánticos, representaré la predicación universal afirmativa «A se predica de todo B» por la fórmula «AaB», la universal negativa «A no se predica de ningún B» por «AeB», la particular afirmativa «A se predica de algún B» por «AiB» y la particular negativa «A no se predica de algún B» por «AoB» (este uso de «a», «e», «i», «o» fue introducido e implantado por los manuales escolásticos medievales).

—Esquemas argumentales de la forma «si ... ..., necesariamente—», donde la línea de puntos marca el lugar de las premisas *[protáseis]* y la raya el lugar de la conclusión *[sympérasma*]; la construcción «si-necesariamente» denota una vinculación o una relación de consecuencia un tanto peculiar a la que llamaré *nexo silogístico;* se trata de la noción de consecuencia que obra implícitamente en las definiciones de *silogismo₁* consideradas antes (§ 1.2).

Así pues, el lenguaje típico del sistema comprende:

1. La clase de las expresiones que son **términos** (o son letras esquemáticas de términos). Son términos *[hóroi]* el sujeto y el predicado en que se resuelve una proposición (*APr.* I 1, 4b16-17). Aparte de esta función, los términos forman una categoría gramatical laxa. Por lo regular son expresiones simples. Tienden a significar sustancias segundas —del tipo de hombre, animal, planta, piedra— y esto les acredita un alcance general. Sin embargo, también cabría admitir términos compuestos y términos relativos a cualidades —e.g. «bueno», «blanco»— y, de hecho, no están enteramente proscritos los términos singulares —«Aristoménes» (*APr.* I 33, 47b23 ss.), «Míkkalos» (*Ibid.,* 47b30 ss.), «Pítakkos» (*APr.* II 27, 70a16 ss.)—. Con todo, las ideas de Aristóteles sobre el objeto propio de la investigación científica, que ha de ocuparse de lo general y no de lo individual, y su interés en el posible intercambio de los papeles de sujeto/predicado entre los dos términos de una proposición, le inclinan

a prescindir de los términos singulares —que normalmente sólo pueden ejercer de sujeto—, así como de los términos relativos a géneros supremos o clases últimas, omnicomprensivas —pues normalmente sólo podrían ser predicados—. En suma, Aristóteles se ve llevado a operar con términos generales de alcance medio, entre el extremo inferior del nombre propio o del término singular y el extremo superior del universal omnipredicable (*APr.* I 27, 43a25-45). Por otra parte, los términos silogísticos son finitos en número y cuentan con un dominio de aplicación o instanciación no vacío. Esto no significa, por cierto, que Aristóteles asuma una suerte de «compromiso existencial» (de manera que el aserto «A se predica de todo B» implique el aserto «A se predica de algún B» merced a la suposición o presuposición de que en todo caso hay cosas que son B, en toda predicación existen los individuos mentados por el sujeto); más bien responde a su uso de variables-abreviaturas y al supuesto de que los términos tienen de suyo aplicación, de modo que a la cuantificación asociada únicamente le queda acotar el alcance particular o universal del término en cuestión. En resumidas cuentas los términos silogísticos cumplen las condiciones siguientes: (i) son términos el sujeto y el predicado de la proposición apofántica; (ii) los términos de una proposición dada pueden intercambiar sus papeles respectivos de sujeto y predicado con arreglo a determinadas pautas de deducción inmediata; (iii) el papel de sujeto corresponde a un término cuantificado; (iv) normalmente cada término tiene al menos otro término subordinado, un término supraordinado y algún término contrario.

2. La clase de los esquemas **apofánticos**, que afirman o niegan algo de algo (*APr.* I 1, 24a16-17) y son por lo regular predicaciones definidas: universales o particulares según la cuantificación universal o particular del sujeto. (Se excluyen igualmente los términos indefinidos que consisten, según *De Interp.* 2 16a30-33, en predicados negados de la forma «no-B se predica de A»: la lógica de esta predicación indefinida de un término negado no se identifica con la lógica de la predicación negativa que es la que ahora interesa). Así pues, los enunciados del lenguaje silogístico resultan predicaciones con una carga lógica determinada y no hay enunciados simples o neutros, carentes de esa carga predicativa positiva/negativa, universal/particular. Interesa anotar que las autopredicaciones —e.g. «AaA» («A se predica de todo A»), «AiA» («A se predica de algún A»)— parecen excluidas de este lenguaje donde hay predicación si algo se dice de alguna otra cosa (*APr.* I 27, 43a25-43). En otras palabras, el

lenguaje de la silogística no considera los enunciados de identidad; puede considerar, en cambio, instanciaciones contrarias o contradictorias del tipo de «alguna ciencia no es ciencia» (vid. *APr.* II 15, 63b 22 ss.); en la teoría de la demostración que Aristóteles considera, el relieve de la lógica de la oposición contrasta con la irrelevancia de la lógica de la identidad.

3. La clase de los esquemas **argumentales o deductivos:** series de dos o más esquemas apofánticos, uno de los cuales se sigue como conclusión del otro, o de los otros, considerados premisas, conforme a un nexo silogístico fundado en las relaciones que median entre los términos presentes en esas premisas. Los esquemas que constan de una sola premisa suficiente, (e.g. «Si A conviene a algún B, también B ha de convenir necesariamente a algún A», *APr.* I 2, 25a20-21), se llaman tradicionalmente deducciones **inmediatas**. Los esquemas y argumentos de dos o más premisas se llaman entonces deducciones **mediatas.** Los silogismos son típicamente deducciones mediatas de dos premisas (e.g. «Si A se predica de todo B y B de todo Γ, A se predica necesariamente de todo Γ», *APr.* I 4, 25b37-39). El sistema silogístico no contiene deducciones inmediatas pero supone algunas pautas determinadas de este tipo —de **conversión**— dentro de las operaciones de reducción inherentes a la estructura del sistema. Representaré el nexo silogístico mediante el símbolo «∴» intercalado entre las premisas y la conclusión; según esto, «AiB ∴ BiA» formula la deducción inmediata antes citada y «AaB, BaΓ ∴ AaΓ» formula la deducción mediata mencionada a continuación.

La noción de consecuencia lógica que parece asumir Aristóteles carece de expresión propia y es un tanto genérica, como ya he señalado anteriormente. La relación misma entre los términos, en la que se funda el nexo silogístico, resulta parejamente imprecisa como también hemos podido observar. Por ejemplo, Bolzano ha sugerido y Łukasiewicz —independientemente— ha asegurado que el silogismo recién citado envuelve una relación extensional de implicación y reviste la forma de un condicional generalizado válido («para todo A, B, Γ: si A se dice de todo B y B de todo Γ, entonces A se dice de todo Γ»). Por mi parte, prefiero una versión deductiva o argumental del silogismo: no sólo parece mejor documentada en el texto de los *Analíticos* y es unánimemente adoptada por sus comentadores próximos —sean devotos seguidores de la lógica aristotélica, sean lógicos rivales como los estoicos o sean críticos hostiles como algunos escépticos—, sino que es una interpretación más acorde con el

cometido de la lógica subyacente de la teoría de la demostración que los *Analíticos* confían a la silogística.

La idea informal de consecuencia que late en la silogística es más restrictiva que nuestra idea estándar de consecuencia lógica; responde primordialmente a la a la conexión de pertinencia interna que vincula las premisas de un argumento demostrativo con su conclusión (su carácter restrictivo ya venía anunciado en la noción de silogismo$_1$, definida en los *APr.* I 1, 24b18-23, vid. supra § 1.2). Veamos con más detenimiento ese vínculo de pertinencia.

Hay consecuencias lógicas cuyo consecuente nada parece tener en común con el antecedente. Por ejemplo, cuando decimos que de una contradicción dada, e.g. «α y no-α», puede seguirse lógicamente otra proposición cualquiera, pongamos por caso «β». Hay consecuencias lógicas cuyo antecedente se dice **pertinente** (*«relevant»*) para el consecuente en el sentido de que ambos comparten un miembro o una variable enunciativa, e.g. de un enunciado dado «α» se sigue lógicamente la disyunción de este mismo enunciado y algún otro, «α v β». A mi juicio, el nexo silogístico, además de explicitar la necesidad de la conclusión con fórmulas como *«anágke»* o *«ex anágkes»*, entraña de hecho una **pertinencia** todavía más fuerte. Puede describirse así: todo término (o letra esquemática de término) que figure en un enunciado (esquema apofántico) perteneciente a un argumento (esquema argumental) silogístico aparece asimismo en algún otro componente enunciativo (apofántico) de la misma deducción. Un silogismo no admite términos sueltos o inoperantes de la misma manera que no admite proposiciones ociosas o improcedentes en orden a sentar la conclusión. Es obvio que esta condición fuerte de pertinencia, observada tanto por las deducciones inmediatas como por las deducciones mediatas que conforman el sistema lógico aristotélico, comporta una idea de consecuencia más restringida que la usual en el análisis lógico estándar, extensional, de hoy en día. La consecuencia aristotélica carece por ejemplo de la propiedad de atenuación (debilitamiento o monotonía) hoy familiar: si el enunciado α es una consecuencia de un conjunto determinado de enunciados $\Gamma = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, también será consecuencia del conjunto unión de ese conjunto con cualquier otro $\Gamma + A = (\alpha_1 ..., \alpha_n, \beta_1 ...)$. En otras palabras, la posibilidad de introducir nuevos enunciados o premisas adicionales en la deducción canónica original de una conclusión es ajena al sistema silogístico, pues o bien la premisa añadida resulta superflua o bien la deducción inicial era insuficiente, y ambos casos

son excluidos por la definición ya conocida de *silogismo$_1$*. Esta misma definición y la exclusión de autopredicaciones implican que la consecuencia silogística no hace gala tampoco de otra propiedad hoy comúnmente atribuida a la consecuencia lógica, la de ser reflexiva: α es en todo caso consecuencia de α —la reflexividad no da lugar sino a deducciones triviales y a argumentos falaces, como luego los aristotélicos objetarán a sus rivales estoicos—. Por añadidura, una deducción de la forma «de no-α se sigue α» deviene absurda en este contexto (*APr.* II 4, 57b14), como antes hemos podido observar. La consecuencia silogística sólo comparte con la consecuencia lógica actualmente estándar las propiedades de asimetría y transitividad. Las referencias al silogismo$_1$ dan una pista sobre la raíz de estas peculiaridades y restricciones. Son una secuela de la matriz básica del silogismo aristotélico, a saber: la idea de argumentación directa e intrínsecamente concluyente, la idea aristotélica de la demostración.

En realidad, la idea de demostración científica que se forja Aristóteles repercute en diversos aspectos lingüísticos y lógicos del sistema: en la opción por los términos generales; en la consideración de asertos antes que suposiciones (aunque los esquemas apofánticos pueden ser neutrales a este respecto, a tenor de *APr.* I 23, 41a37-40, el componente hipotético de una deducción a partir de hipótesis es irreducible según *APr.* I 44, 50a16 ss., por ende la demostración indirecta aun conteniendo pasos silogísticos no cabe dentro del sistema; ni, en general, cabrán las deducciones apagógicas, que parten de una suposición falsa); en la condición de atingencia fuerte que distingue al nexo silogístico o, en fin, en la noción de consecuencia lógica que envuelve tácitamente el sistema. En este sentido, la silogística de los *Analíticos* es un sublenguaje y un subsistema —no sólo finitos sino relativamente definidos— de la lógica más genérica que el *Organon* aristotélico contiene como una sustancia en solución, es una «analítica» cortada por el patrón de la demostración.

2.2 *Configuración del sistema.*

Aristóteles centra su atención en los silogismos compuestos por tres términos. Las deducciones canónicas de la silogística aristotélica constan de dos premisas que tienen un término común, el término medio *[mesón]*, y una conclusión formada por los otros dos términos, los términos extremos *[ákra]*. Por otra parte, varios términos medios consecutivos pueden dar lugar a cadenas silogísticas o a po-

lisilogismos (*APr.* I 25, 41b36-42a5, 42a30-42b25). En esta disposición late la intuición aristotélica de la idea de transitividad bajo la forma de lo que podríamos llamar un «principio *simple* de encadenamiento» y un «principio *generalizado*». De acuerdo con el principio *simple*, las premisas de un silogismo deben formar una cadena de predicaciones que, a través de un término medio, vinculan los términos extremos de la conclusión (*APr.* I 23, 41a3-12). Conforme al principio *generalizado*, una deducción silogística es un silogismo o un polisilogismo, una serie de silogismos eslabonados por el engarce sucesivo o convergente de varios términos medios (*APr.* I 25, 41b36 ss.). La noción de polisilogismo es bastante amplia: un polisilogismo comprende más de un término medio en un conjunto finito de enunciados o esquemas apofánticos que desembocan en un último miembro, digamos α. Los silogismos que componen un polisilogismo pueden representar una configuración lineal o ramificada, ordenada con relación a esta conclusión α, de modo que resulta algo así como la imagen invertida de un *árbol* en el sentido que suele atribuirse a esta configuración en el análisis lógico contemporáneo: mientras que nuestros *árboles*, finitos o infinitos, penden de un punto inicial de origen, los polisilogismos aristotélicos son finitos y están pendientes de su punto terminal, la conclusión. La noción de cadena silogística puede ser algo más precisa. Una cadena es un tipo de polisilogismo consistente en un orden lineal o ramificado de silogismos $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ tal que α es la conclusión de σ_n y la conclusión de cada silogismo σ_i —para $i < n$— figura como premisa de un silogismo posterior σ_j —$j \leq n$—, de manera que uno de los términos extremos en σ_i viene a ser el término medio en σ_j. Por lo demás, el encadenamiento lineal o ramificado de silogismos es la forma que puede adoptar un cuerpo deductivo de conocimientos demostrados y, habida cuenta de la condición de atingencia fuerte (de la no monotonía de la relación de consecuencia silogística) antes señalada, esta estructura deductiva concuerda —pero no coincide exactamente— con el orden parcial de implicación que hoy es costumbre atribuir a las teorías deductivas. Quizás la referencia inicial del encadenamiento fueran los tratados matemáticos de *Elementos*, bien conocidos en la Academia platónica; Aristóteles, en una de sus glosas del término elementos *[stoikheîa]*», dice: «las demostraciones primeras e implícitas en otras demostraciones se llaman «elementos» de las demostraciones» (*Metaphys.* Δ 3, 1014a35-b2); pero la noción de cadena silogística es ya un producto técnico del sistema mismo.

Aristóteles piensa que los silogismos del sistema han de encontrarse en una de las tres figuras *[skhémata]* que cabe reconocer. Suponiendo conforme a la práctica aristotélica habitual que el orden de las premisas no hace al caso, las tres figuras se distinguen entre sí en función del papel que toca desempeñar al término medio en las premisas: en la 1.ª figura, oficia de sujeto en una premisa y de predicado en la otra: en la 2.ª figura, hace de predicado en ambas; en la 3.ª figura, de sujeto (*APr.* I 23, 41a12-20). Así pues:

	1.ª figura		2.ª figura		3.ª figura	
configuración normal de términos en las premisas	A	B	M	N	Π	Σ
	B	Γ	M	Ξ	Ρ	Σ
pasaje de *APr.* I que expresamente desarrolla cada una de ellas:	4,25b27ss.		5,26b34ss.		6,28a10ss.	

Aristóteles introduce subsiguientemente una distinción entre un extremo mayor y un extremo menor que ha suscitado buen número de discusiones. Otros puntos que han originado cierta confusión son el origen y la legitimidad de la famosa «cuarta figura» y de las conclusiones llamadas «indirectas».

Esta diversificación de las figuras silogísticas no deja de tener alguna repercusión metodológica. Los silogismos de la primera sientan su conclusión mostrando que ha sido satisfecha una condición suficiente para que el predicado de la conclusión se afirme o niegue del sujeto. Sólo esta figura admite conclusiones de cualquiera de las cuatro formas básicas apofánticas: universal afirmativa (**a**), universal negativa (**e**), particular afirmativa (**i**), particular negativa (**o**). Comprende los «modos» o esquemas siguientes:

	denominación tradicional (escolástica)
AaB, BaΓ ∴ AaΓ	Barbara
AeB, BaΓ ∴ AeΓ	Celarent
AaB, BiΓ ∴ AiΓ	Darii
AeB, BiΓ ∴ AoΓ	Ferio

Los silogismos de la segunda establecen una conclusión negativa

mostrando que no ha sido satisfecha una condición necesaria. Comprende los esquemas:

MeN, MaΞ ∴ NeΞ	Cesare
MaN, MeΞ ∴ NeΞ	Camestres
MeN, MiΞ ∴ NoΞ	Festino
MaN, MoΞ ∴ NoΞ	Baroco

Los silogismos de la tercera arrojan una conclusión particular mostrando las aplicaciones particulares de un caso universal. Comprende los esquemas:

ΠaΣ, PaΣ ∴ ΠiP	Darapti
ΠeΓ, PaΣ ∴ ΠoP	Felapton
ΠiΓ, PaΣ ∴ ΠiP	Disamis
ΠaΣ, PiΣ ∴ ΠiP	Datisi
ΠoΣ, PaΣ ∴ ΠoP	Bocardo
ΠeΣ, PiΣ ∴ ΠoP	Ferison

No podemos estar seguros de que Aristóteles previera justamente esta significación metodológica de las tres figuras. De lo que no cabe duda es de que reconoce estos catorce modos deductivos como esquemas lógicamente válidos y como pautas de convalidación silogística.

Aristóteles enuncia algunas reglas específicas que condicionan la validez de una deducción de acuerdo con la figura correspondiente. Así: en la primera figura, la premisa que contenga el término mayor (el que resulta predicado en la conclusión, i.e. A) habrá de ser universal, y la otra premisa habrá de ser afirmativa; en la segunda la premisa que contenga el término mayor ha de ser universal y una de las premisas ha de ser negativa; en la tercera, la premisa que contenga el término menor (i.e. P) será afirmativa y la conclusión nunca pasará de ser particular. También menciona algún requisito general que alcanza a todos los esquemas de cualquier figura: e.g., habrá al menos una premisa universal y una premisa afirmativa (*APr.* I 24, 41b6 ss.). Pero ninguna de estas reglas —u otras similares— gobierna o funda el sistema silogístico como algunas vulgarizaciones escolares han hecho creer [6]. La identificación de los modos válidos,

[6] Esto vale igualmente para los presuntos principios que dan en sentar las versiones tradicionales y neotradicionales del silogismo. Por ejemplo, se ha atribuido espe-

de los silogismos pertenecientes al sistema, descansa más bien en una especie de estructura interna propiciada por la distinción entre los miembros perfectos del sistema y los imperfectos. En muy contadas ocasiones Aristóteles recurre a otros procedimientos de convalidación como el de *ékthesis,* un método que en este contexto consiste en la selección de ciertos términos concretos para sustituir las letras de un esquema y hacer así su validez más manifiesta. En cualquier caso, Aristóteles tiende a analizar cada figura desde un punto de vista casi combinatorio —¿cuáles son los modos silogísticos posibles a partir de premisas de esta u otra forma en tal o cual figura?— y, en lo que concierne a las relaciones entre los modos reconocidos en cada figura, no pierde de vista la estructura determinada por la designación de unos como silogismos perfectos y por la reducción a éstos de los demás miembros relativamente imperfectos. Todo ello obliga a considerar la silogística como un sistema lógico, como una teoría particular de la deducción lógicamente concluyente, en vez de ver simplemente en ella un repertorio de pautas deductivas mejor o peor clasificadas o, puestos en el otro extremo, el espejo del desenvolvimiento canónico, normativo, de los principios trascendentales del uso de la razón.

2.3 Estructura del sistema.

La silogística es una teoría de la deducción destinada a la convalidación de argumentos o esquemas argumentales lógicamente concluyentes. Descansa en (A) unos supuestos más bien implícitos y (B) unas bases expresas, donde figura la designación de unos contados

cial relieve al papel del llamado «dictum de omni et nullo» como principio regulador. El «dictum» reza: «todo cuanto se afirme (o niegue) de un sujeto tomado en un sentido distribuido se afirma (o niega) de todo aquello que esté subsumido bajo este sujeto» —e.g.: todo cuanto se afirme o niege del hombre, en el sentido de todos y cada uno de los hombres, se afirma o niega de cualquier individuo humano—. El fundamento aristotélico de este principio no pasa de ser una acotación explicativa de la noción «predicarse de todos *[katà pantòs kategoreîsthai]*, de ninguno *[katà medenòs]*» (*APr.* I 1, 24b28-30). Pero el «dictum» sólo empieza a ejercer de principio silogístico en el marco de la silogística medieval y post-medieval y en un contexto bien distinto del aristotélico, en el configurado por la teoría de la distribución dentro del análisis medieval de las propiedades de los términos. Vid. E. J. Ashworth: *Language and Logic in the Post-Medieval Period, Dordrecht/Boston,* 1974; pp. 232 ss.

esquemas deductivos como silogismos perfectos; cuenta además con (C) una articulación interna consistente en la reducción efectiva de cualquier otro silogismo del sistema a los designados.

Consideremos brevemente cada una de estas partes.

(A) De los supuestos implícitos, usados antes que formulados, merecen destacarse dos:

A 1. El primer supuesto viene a ser una especie de principio *formal*: un silogismo σ es válido si y sólo si cualquier silogismo que revista justamente la misma forma de σ es válido. Este supuesto envuelve una noción restringida de **forma lógica:** cabe hablar de la forma de σ como si se tratara de una forma única determinada y como si el *revestir la misma forma* fuera una relación fuerte de equivalencia (hoy es habitual tomar este supuesto de modo algo más laxo, en el sentido de que un argumento puede revestir tantas formas diversas como formalizaciones admita en diversos lenguajes lógicos, y será válido con respecto a un lenguaje lógico dado L si tiene al menos un correlato formal válido en L). El principio cuenta así con una virtud positiva de convalidación: para mostrar la validez de un argumento o un esquema silogístico bastará mostrar un silogismo de su misma forma obviamente válido. Pero su uso más notable es negativo, i.e. a los efectos no de una convalidación sino de una invalidación: para sentar la invalidez de un argumento o un esquema deductivo basta mostrar un argumento de la misma forma manifiestamente inválido, i.e. un contraargumento parejo con las premisas verdaderas y la conclusión falsa. Es posible que el procedimiento tenga una raíz dialéctica. Su empleo aristotélico como vía de recusación da lugar a un método de invalidación simultánea de diversos esquemas por medio de contrainstancias en el sentido indicado. De este modo excluye, por ejemplo, la validez de cualquier esquema que parta de dos premisas de las formas «AaB» y «BeΓ»: de tales premisas no cabe obtener una conclusión silogísticamente válida (*APr.* I 4, 26a3 ss.); sustituyamos «A» por el término «animal», «B» por el término «hombre» y «Γ» por el término «piedra» si interesa una conclusión afirmativa o por el término «caballo» si interesa una conclusión negativa: entonces de las premisas «animal se predica de todo hombre» y «hombre se predica de ninguna piedra» sólo se desprenderán conclusiones afirmativas inválidas, i.e. afirmaciones del tenor de «animal se predica de toda (o alguna) piedra» que son palmariamente falsas; ahora bien, lo mismo acontece con las conclusiones

negativas pues una deducción como «si animal se predica de todo hombre y hombre se predica de ningún caballo, se sigue necesariamente que animal no se predica de ningún (o algún) caballo» también resulta obviamente inválida.

A 2. El segundo supuesto tácito se cifra en el uso de dos tipos de *sustitución.* Con arreglo al primero, toda la letra esquemática es sustituible por un término general concreto («animal», «hombre», etc.). El segundo tipo de sustitución empleado por el sistema consiste en la utilización de unas letras de término por otras. Sea E un esquema silogístico compuesto por las letras de término distintas t_1, t_2, t_3. Llamo a E* «variante esquemática» de E si E* resulta de sustituir uniformemente cada estancia de t_1, t_2, t_3 en E por una estancia correlativa de otras letras t_1*, t_2*, t_3* de modo que se mantenga la distinción primitiva entre ellas. Conforme a este segundo tipo de sustitución, todo silogismo es sustituible por una variante esquemática em este sentido y, considerando que el esquema E ya es trivialmente una variante esquemática de sí mismo, las variantes esquemática en este sentido y, considerando que el esquema E ya clase de equivalencia. Podemos reservar para estas clases de equivalencia la denominación de «modos» silogísticos y decir en este sentido que el silogismo σ pertenece al modo *Barbara* (o al modo *Darii,* etc.). A la luz de estos usos de la sustitución cabe fijar el significado práctico que el supuesto formal, antes señalado, cobra en Aristóteles: un esquema E es una deducción válida si cualquier variante esquemática de E es un silogismo y, en definitiva, pertenece al sistema; un argumento deductivo es lógicamente válido si es una instanciación o una aplicación de un silogismo. Por lo demás un argumento o un esquema deductivo sólo son válidos si carecen de un contraargumento o una contrainstanciación cuyas premisas sean verdaderas y cuya conclusión sea falsa. Con todo, estos supuestos y usos prácticos no se traducen en los *Analíticos* en un concepto expreso de forma lógica, ni en una doctrina de la forma lógica semejante a las que hoy se vienen proponiendo: hoy, quienes se atienen a esta doctrina, aseguran que todas las propiedades lógicas de una proposición o de un conjunto de proposiciones están determinadas cabalmente por su forma lógica propia, profunda o subyacente; sin embargo, a juicio de Aristóteles la validez de una deducción no se funda en su forma lógica, sino más bien en la necesidad consecutiva de la conclusión (en su *ex anágkes symbaínein*) a raíz de lo propuesto o sentado en las premisas pertinentes.

(B) La silogística aristotélica tampoco es una teoría de la verdad lógica ni un conjunto de proposiciones o tesis lógicamente verdaderas. Es una teoría de la deducción que adopta determinados esquemas a título de esquemas válidos «primitivos» —valga la expresión aunque no sea adecuada—: son los silogismos designados como **perfectos** *[téleioi]*, capaces de ejercer de pautas de convalidación o reducción de todos los demás silogismos del sistema. A estos efectos no sólo cuenta la peculiar virtud de esos esquemas; hay que ayudarse además de las posibilidades de transformación deductiva que deparan otros esquemas de deducción inmediata —o de conversión— y, en los casos de reducción más complicados, también actúa un principio de alcance general que permite una especie de convalidación indirecta.

B 1. Este principio general establece que no cabe aceptar las premisas de un silogismo y negar su conclusión, pues ésta se sigue necesariamente de ellas (*APr.* II 2, 53b7 ss.; 4, 57a36 ss.). Por consiguiente, quien asuma las premisas y niegue la conclusión de una deducción silogística incurrirá en contradicción —conviene notar que el principio también tiene aplicación expresa en el caso de la deducción inmediata (*APr.* II 2, 53b12-13).

B 2. Los esquemas de deducción inmediata son los siguientes:

—AeB ∴ BeA («Si A no se predica *[hypárkhei]* de ningún B, tampoco B se predicará de ningún A», *APr.* I 2, 25a15-16).

—AaB ∴ BiA («Si A de todo B, también B se predica de algún A», *Ib.* 25a17-18).

—AiB ∴ BiA («Si A de algún B, también es necesario que B se predique de algún A», *Ib.* 25a20-21).

Estas deducciones, cuya conclusión se obtiene permutando los términos sujeto y predicado de la premisa, se conocen por la denominación posterior de *conversión:* la primera y la tercera son conversiones simples, la segunda es una conversión por accidente (no mantiene la cuantificación de partida).

B 3. En la presentación del sistema, Aristóteles designa como perfectos los esquemas (o modos) de la primera figura, a saber:

—Barbara: «Si A de todo B y B de todo Γ, A se predica *[kategoreîsthai]* necesariamente de todo Γ» (*APr.* I 4, 25b37-38).

—Celarent: «Asimismo, si A de ningún B pero B de todo Γ (se sigue) que A se predicará *[hypárxei]* de ningún Γ» (*Ib.* (*Ib.* 26a23-25). (*Ib.* 26a25-27).

—Darii: «Pues predíquese A de todo B, B de algún Γ. Entonces... es necesario que A se predique de algún Γ» (*Ib.* 26a23-25).

—Ferio: «Y si A se predica de ningún B pero B de algún Γ, es necesario que A no se predique de algún Γ» (*Ib.* 26a25-27).

La perfección de estos silogismos estriba en su obviedad: la disposición misma de sus términos transparenta su condición de cadena deductiva lógicamente concluyente. En cambio, la validez de los demás silogismos del sistema, con ser no menos inherente a cada uno de ellos, se evidencia por su reducción *[anagogé]* a la forma de concluir propia de los primeros.

(C) Aristóteles se sirve de dos métodos de reducción, uno suele calificarse como reducción directa («deíctica») y el otro como reducción indirecta («por recurso a lo imposible»).

C 1. El procedimiento de reducción directa puede describirse así: Sean **P** y **c** las premisas y la conclusión, respectivamente, de un silogismo dado, σ. Una reducción directa de σ es una serie finita de esquemas apofánticos que empieza con **P** y cada uno de los miembros siguientes se deduce (i) bien por la reiteración de un miembro anterior, (ii) bien por la conversión de un miembro anterior, (iii) bien como conclusión de un silogismo perfecto, hasta acabar en **c**. Veamos, por ejemplo, la reducción del modo Cesare de la segunda figura al modo Celarent (*APr.* I 5, 27a5-9):

σ considerado	reducción directa
M e N	1. M e N
M a Ξ	2. M a Ξ
∴ N e Ξ	3. ∴ N e M por (ii) aplicada a 1.
	4. ∴ M a Ξ por (i) aplicada a 2.
	5. ∴ N e Ξ por (iii): Celarent, 3-5.

C 2. El método de reducción indirecta supone, además de la base de maniobra anterior, los resultados del análisis de las relaciones de oposición, en particular los correspondientes a la contrariedad y la contradicción. En la práctica, Aristóteles da por sentado que de la asunción de una proposición se sigue la imposibilidad de asumir su contraria —dos proposiciones contrarias entre sí no pueden ser a la vez verdaderas (aunque puedan resultar falsas)— o su contradictoria —dos proposiciones contradictorias entre sí no pueden ser a la vez verdaderas ni falsas—. La reducción indirecta opera además sobre la base del principio general B 1 ya indicado anteriormente.

Aristóteles describe la reducción indirecta como un proceso que parte de la proposición contradictoria de la conclusión de un silogismo dado; de ahí se sigue la imposibilidad de tal asunción y, por ende, queda convalidado el silogismo en cuestión con la conclusión que le es propia (*APr.* II 8, 59b1-5). Cabe entonces caracterizar la reducción indirecta como sigue: Sean **P** y **c** las premisas y la conclusión de un silogismo dado, σ. Una reducción indirecta de σ es una serie finita de esquemas apofánticos que empieza con **P**, a continuación introduce el esquema contradictorio de **c** y luego cada uno de los miembros siguientes se deduce conforme a uno de los procedimientos (i)-(iii) de la reducción directa, hasta incurrir en un aserto incompatible con un miembro precedente de la serie; entonces la reducción se remata con la consiguiente reposición de la conclusión original, **c**, de σ. El método admite dos variantes según cuál sea la índole de la incompatibilidad perseguida: una incompatibilidad fruto de la contradicción o fruto de la contrariedad. Como muestra de la primera, veamos la reducción del modo Baroco de la segunda figura (*APr.* I 5, 27a36-27b1):

σ considerado	reducción indirecta
M a N	1. M a N
M o Ξ	2. M o Ξ
∴ N o Ξ	3. N a Ξ, contradictorio de c.
	4. ∴ M a Ξ, por (iii): Barbara, 1 y 3-4; pero incompatible con 2;
	5. ∴ N o Ξ

Como muestra de la segunda variante, veamos la reducción del modo Darapti de la tercera figura (*APr.* I 7, 29a37-39).

σ considerado	reducción indirecta
A a Γ	1. A a Γ
B a Γ	2. B a Γ
∴ A i B	3. A e B, contradictorio de c.
	4. ∴ B a Γ, por (i) aplicada a 2.
	5. ∴ A e Γ, por (iii): Celarent,3-5; pero incompatible con 1.
	6. ∴ A i B.

Los procedimientos de reducción discurren acerca del sistema,

no dentro de él: sientan ciertas relaciones entre determinadas partes o fragmentos del sistema silogístico, e.g. entre los modos de la primera figura y todos los demás; conducen en cada caso a la convalidación de un silogismo, no a la obtención de una conclusión o a la prueba de una proposición. De ahí que, junto con los modos silogísticos designados, puedan contar con recursos deductivos que no pertenecen de suyo al sistema e.g.: la reiteración ocasional de una asunción previa y, sobre todo, el uso del patrón de la reducción al absurdo —aquí no es preciso insistir en que el empleo de la reducción al absurdo *[apagogé dià toû adynátou]* como forma de demostración indirecta difiere del uso metateórico del patrón como método de reducción *[anagogé]* indirecta.

Esta perspectiva metateórica abierta por Aristóteles contiene ciertas tesis de interés sobre la significación de la silogística y su alcance como teoría lógica. Entre ellas merecen recordarse las siguientes:

1 a. Todo silogismo es reducible a —convalidable a través de— los cuatro silogismos perfectos de la primera figura (*APr.* I 4, 26b29-33).

1 b. Todo silogismo es reducible en particular a los modos universales, Barbara y Celarent, de la primera figura (*APr.* I 7, 29b1 ss.).

1 c. En general, los silogismos de cualquier figura, incluidos los de la primera, son reducibles a los de otra (*APr.* I 45, 50b5 ss.).

Estas tesis dan cuenta de ciertas relaciones intrasistemáticas entre los modos de la silogística. Pero también hay consideraciones de otro tipo sobre la relación entre la silogística y la deducción lógicamente concluyente, digamos entre los silogismos$_2$ del sistema y el silogismo$_1$ que, como se recordará, envuelve la idea aristotélica general de consecuencia lógica. A saber:

2. Si D es una deducción silogística$_2$, entonces D es una deducción silogística$_1$. En otras palabras, tener la forma de un silogismo$_2$ o de una cadena de silogismos$_2$ —en suma: pertenecer al sistema— es suficiente para acreditar una condición de argumento deductivo lógicamente válido. También podría entenderse como una formulación peculiar de la corrección deductiva del sistema: todo silogismo$_2$ es lógicamente concluyente, entraña una relación de consecuencia aristotélica.

3. Si D es una deducción silogística$_1$, entonces D es una deducción silogística$_2$. Aristóteles piensa que toda demostración y toda reducción concluyente (comprendida la demostración indirecta o la deducción a partir de hipótesis) puede llevarse a cabo mediante un

silogismo$_2$ o una cadena de silogismos$_2$ (*APr.* I 23, 40b17-23, 41b3-5; I 25, 41b35 ss.). Aduce como razón la necesidad de que toda demostración y toda deducción concluyente establezcan que algún predicado se aplica o no a algún sujeto, sea en un sentido universal o en un sentido particular (Ib. 40b17-19), y luego procede a una especie de prueba por casos. Esta tesis podría representar una formulación peculiar de la suficiencia deductiva del sistema. Pero, de hecho, en los *Analíticos,* constituye una pretensión en vez de un resultado probado. El propio Aristóteles advierte en alguna ocasión la dificultad de normalizar como silogismos$_2$ ciertas demostraciones elementales: e.g. la de que todo triángulo isósceles tiene dos ángulos rectos porque todo triángulo los tiene (*APr.* I 35, 48a30-39). La presunción de esta capacidad de la silogística, la de ser una —si no **la**— lógica subyacente suficiente y completa de la demostración científica, todavía traerá mayores quebraderos de cabeza a los comentadores aristotélicos que han de enfrentarse a la lógica rival de los estoicos y no pueden ignorar el desarrollo autónomo de la práctica informal de la demostración en matemáticas. Su difícil situación puede ilustrarse con una muestra familiar. Consideremos la demostración: «A es igual a B; B es igual a Γ; por consiguiente, A es igual a Γ». Se trata de una deducción «no-metódicamente concluyente [*amethódos peraínon*]», por decirlo en términos estoicos. Alejandro (*In Topic.* 14.21 ss.) ensaya su reducción silogística agregando la premisa universal que le falta; resulta así: «Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí; A y Γ son iguales a B; por consiguiente, A es igual a Γ». Pero esta reducción plantea varias dudas. En primer lugar, o bien prescinde del papel de término medio asignado a «B» en el argumento original o bien la noción común o axioma aducido como primera premisa pierde generalidad: serán las cosas iguales a B las que resultarán iguales entre sí. Por otra parte, la conclusión de la reducción silogística habría de ser «por consiguiente, A y Γ son iguales entre sí», habría de señalar una propiedad de A y Γ tomadas conjuntamente antes que una relación entre ellas. Dicho de otro modo, las dificultades de la silogística con la lógica de relaciones ya podían saltar a la vista mucho antes de que De Morgan anunciara que no hay silogismo que convalide el argumento: «Todo caballo es un animal. Por consiguiente, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal».

Hoy cabe demostrar con cierta facilidad que la silogística, convenientemente reconstruida, es un sistema suficiente y completo den-

tro de un ámbito restringido de la lógica general de la cuantificación; llega a ser incluso decidible, de modo que ante cualquier argumento formulable en los términos de su lenguaje cabe determinar por un procedimiento efectivo si tal argumento es o no es un silogismo del sistema, resulta convalidado o invalidado [7]. Pero estas virtudes de una silogística *convenientemente reconstruida* distaban de ser perceptibles para su constructor original. Quizás Aristóteles podría haberse planteado la compleción del sistema en unos términos parecidos a los actuales. Sea A un argumento cualquiera formalizable en el lenguaje silogístico: ¿cabe establecer entonces que o A tiene la forma de un silogismo o A tiene un contraargumento? ¿Se puede asegurar que el sistema tiene la capacidad suficiente para convalidar su esquematización A* en los términos de una deducción silogística si A es un argumento válido, o para invalidar A* en los términos de una contrainstanciación si A es un argumento inválido? Son preguntas posibles en la medida en que el mundo de las posibilidades —tanto más si se trata de posibilidades hermenéuticas— es un mundo abierto. Pero al margen de cualquier conjetura sobre lo que Aristóteles pudiera haberse planteado a este respecto, más fundada en lo que conocemos de lógica que en lo que de Aristóteles podemos saber, lo cierto es que no lo hizo. Aristóteles no se planteó muchas de nuestras preguntas elementales acerca de las propiedades estructurales de los sistemas deductivos. Esta inconsciencia nada tiene de particular. Pues también es verdad que este tipo de cuestiones metalógicas, hoy moneda corriente, sólo han empezado a verse con claridad bien entrado ya el presente siglo y a la luz de ideas ajenas a Aristóteles, e.g.: la distinción entre teoría y metateoría; la distinción entre la dimensión sintáctica, o puramente formal, y la dimensión semántica de los lenguajes formalizados, o entre las derivaciones efectivas y las consecuencias lógicas de una teoría; la posible correlación entre ambas dimensiones dentro de un sistema lógico o una clase de sistemas lógicos. Todo esto apenas tiene que ver con la

[7] Vid. los ya mencionados J. Łukasiewicz (1951, 1957): *La silogística...*, c. V, §§29-35, pp. 88 ss.; T. Smiley (1973): «What is a syllogism?»; J. Corcoran (1975): «Aristotle on the underlying logics of science»; P. Thom (1981): *The Syllogism*, o.c., ch. xi, pp. 181 ss. Pero no conviene entusiasmarse anacrónicamente con los aspectos metasistemáticos de nuestras reconstrucciones hasta el punto de querer ver en los *Analíticos* mismos un claro precedente de la «Beweistheorie» de Hilbert y en Aristóteles el primer «metamatemático» de la historia (*sic:* R. Smith (1984): «Aristotle as Proof Theorist», l.c., p. 590).

noción informal y compacta de «**seguirse lógicamente de**» («compacta» en la medida en que es a la vez, indistintamente, consecuencia lógica y deducción concluyente), de la que parte Aristóteles, es decir: con su idea de silogismo$_1$. Por lo demás, también queda muy lejos del desarrollo aristotélico de la silogística como una trama subyacente en la ciencia demostrativa.

3. *La dimensión epistemológica de la idea de demostración.*

La demostración debe su calidad de discurso racional por antonomasia no tanto a sus virtudes lógicas como a sus valores cognoscitivos. Es un tipo de argumentación que depara conocimiento concluyente y hace saber. Reúne así una doble virtud epistemológica. Por un lado da a conocer —muestra, hace ver— no sólo que algo es el caso, sino el porqué de ser precisamente así (una demostración es una explicación cabal, un « *syllogismòs deiktikòs aitías kai toû dià tí*», *APo.* I 24, 85b23-24). Por otro lado, ella misma —su cogencia— comporta un estado efectivo de conocimiento; es un silogismo *epistemonikós*, que nos hace saber simplemente por el hecho de tenerlo, «*katòn tô éthein autón epistámetha*» *APo.* I 2, 71b17-19). Dos son entonces los aspectos epistemológicos de la demostración aristotélica dignos de consideración: uno es su capacidad y su función explicativas, de las que luego nos ocuparemos; el otro consiste en su significación y su autosuficiencia cognoscitivas en las que ahora vamos a entrar.

3.1 El conocimiento científico como saber demostrado (1).

En Aristóteles, el conocer en general *[eidénai]* puede presentar al menos dos variantes: a) la de tener idea o conocimiento, ser consciente o caer en la cuenta de algo *[gignóskein]*; b) la de saber o tener un conocimiento científico de que algo es el caso *[epístasthai]*. Esta segunda es la constituida por el conocimiento demostrado, el conocimiento que envuelve la universalidad y la necesidad de un discurso proposicional sobre la naturaleza del caso. La ciencia, como recuerda la *Etica Nicomáquea*, es un modo de ser demostrativo (*EN.* VI 3, 1139b32). A esta luz, el planteamiento aristotélico tiene visos de ser una concepción apodíctica uniforme del conocimiento científico, un

programa dogmático que corta toda la ciencia por el único patrón del silogismo demostrativo. Es posible que Aristóteles incurriera ocasionalmente en un desliz parecido. Pero la tendencia característica de su pensamiento se inclina por un pluralismo metodológico, por la adecuación del método tanto al dominio de objetos considerado como al propósito de la investigación o del discurso (e.g. *EN.* I 1, 1094b18-22); de modo que, por ejemplo, tan fuera de lugar estaría emplear técnicas suasorias en matemáticas como exigir pruebas concluyentes en retórica (*Ib.*, 1098a25-35). Esta adecuación selectiva conviene a otros ámbitos del conocimiento científico, según muestran —pongamos por caso— el c. 1 del libro I del tratado *De Anima* o algunas observaciones al respecto del tratado sobre las *Partes de los Animales* (640a1 ss). En último término, la opción más razonable por un método particular depende de la estructura inteligible de cada aspecto de ser o tipo de realidad inherente a las cosas que son objeto de estudio. Cabe pensar entonces que la ciencia o el conocimiento científico *[epistéme]* es una de esas nociones que se dicen de diversas maneras: cobra un sentido preeminente en el marco de las disciplinas demostrativas por antonomasia (e.g. matemáticas) pero también tiene unos usos apropiados con relación a otra suerte de disciplinas (física, biología, saberes prácticos).

El sentido primordial y unitario de «conocimiento científico» viene a ser el propuesto por Aristóteles bajo una especie de criterio general: «Cuando uno está convencido de que algo es el caso y le son conocidos sus principios, sabe científicamente» (*EN.* V 3, 1139b34-35). Sobre este denominador común cabe precisar la acepción fuerte que corresponde al saber efectivamente demostrado. Diremos, de acuerdo con esta acepción, que X sabe científicamente que α si y sólo si α pertenece a una ciencia demostrativa C de manera que:

(i) C es un conjunto finito y ordenado de proposiciones verdaderas, cerrado con respecto a la relación de consecuencia silogística, y versa sobre un dominio acotado de lo que hay —e.g. sobre un género natural de cosas—;

(ii) α es o bien una proposición demostrable de C o bien una proposición no demostrable de C —i.e. una de las tesis primordiales de C a partir de *[ex]*, o a través de *[dià]*, las cuales se deducen en principio todas las demás como consecuencias silogísticas.

Un supuesto de alcance general es el declarado justo al inicio de los *Segundos Analíticos:* toda enseñanza y todo aprendizaje racional

se derivan de algún conocimiento previo (*APo.* I 1, 71a1-2). Aristóteles parece situarnos así en el contexto peculiar de su teoría de la demostración y de la ciencia. Uno de los ingredientes de este planteamiento es su ambientación didáctica: toda ciencia es enseñable y todo objeto de investigación es susceptible de ser aprendido (*EN.* VI 3, 1139b25-26); por lo demás, los silogismos demostrativos de los *Analíticos* no son otros que los denominados «didácticos» en la clasificación general de las *Refutaciones sofísticas,* i.e. argumentos que prueban su conclusión a partir de los principios propios de una disciplina a fin de que el discípulo se convenza (2, 165b1-3). Esto no sólo apunta al hecho de que el dominio de una ciencia ha de mostrarse en la capacidad del maestro para dar razón de lo que sabe y convencer así a los aprendices de la disciplina, sino al supuesto de que la demostración se mueve en el medio discursivo y dialéctico que caracteriza a la argumentación griega desde la ilustración sofística de la segunda mitad del s. V a.n.e.: en este medio, hacer saber es una manera de enseñar algo a alguien e investigar es una manera de aprender algo de alguien. Este tono dialéctico —alentado por la Academia platónica— se hace tan notorio en diversos lugares de los *Segundos Analíticos* que algunos comentadores modernos han dado en pensar que la teoría aristotélica de la demostración es, en realidad, una teoría de la exposición racional del conocimiento científico, un programa referido no en absoluto a la investigación, adquisición y desarrollo del conocimiento sino exclusivamente a la forma óptima de exponer lo ya sabido. Puede parecer exagerada tal interpretación; creo que, en efecto, resulta un tanto unilateral y no hace justicia a la complejidad epistemológica de la idea aristotélica de demostración. Sin embargo, una preocupación análoga por la exposición racional y disciplinaria acusa también la tradición matemática de la confección de *Elementos* —según Proclo: *In I Eucl. Comm.,* 71 ss.— y, en todo caso, es digno de mención el hecho de que la tradición que podríamos llamar «clásica» en teoría de la ciencia acuse un sesgo didáctico parecido en marcos y momentos muy distintos del aristotélico. Por ejemplo, cumplido el primer tercio del s. XIX reaparece en Bolzano, quien entiende por teoría de la ciencia *[Wissenschaftslehre]* la disciplina que nos instruye en la exposición ordenada y razonada de cada ciencia bajo la forma de un tratado que define su dominio temático respectivo, i.e. la porción de verdades conocidas que le corresponde (*Die Wissenschaftslehre,* Einl. §§ 1-2).

Otra tesis principal de los *Segundos Analíticos* afirma que toda

demostración supone algún principio propio e indemostrable (*APo.* I 2, 71b20-21): no se puede tener conocimiento científico por demostración *[epístasthai di' apodeíxeos]* sin conocer los primitivos principios inmediatos *[mè gignóskein tàs prótas arkhàs tás amésous]* (*APo.* II 19, 99b20-21). Sobre el fondo del supuesto anterior, esta posición de Aristóteles trata de hacer frente a los problemas que la posibilidad misma del conocimiento científico como saber demostrativo suscitaba en la Academia platónica y en sus aledaños. La cuestión es conciliar esta particular cogencia del conocimiento científico con la lógica misma de la demostración y con la suposición general de que todo conocer parte de algún conocimiento previo. (Naturalmente, la demostración de que se trata aquí es la demostración directa, la deparada por el silogismo demostrativo; no la demostración indirecta que puede representar un silogismo dialéctico que desemboque en una contradicción (s.e. 165b3), cuya cogencia no viene acompañada de las virtudes epistemológicas inherentes al saber científico propiamente dicho; es obvio que la reducción al absurdo no suscita cuestiones como la planteada).

A la luz de *APo.* I 3, 72b5-20, y dando por descontado que el conocimiento científico no es una empresa infinita, caben tres opciones ante esa cuestión. Una consiste en pensar que el saber científico resulta, en tales términos, inviable pues el intento de demostrar cualquier proposición remite a un regreso indefinido en busca de unos principios parejamente fundados; ésta podría ser una posición escéptica ingenua y, sin mucho fundamento, ha sido atribuida a Antístenes. Otra es considerar en cambio que todo puede ser demostrado si se cae en la cuenta de que la demostración envuelve la posibilidad de ser una especie de prueba circular en la que los principios y las conclusiones se sustentan recíprocamente; suele endosarse esta opinión a los seguidores de Jenócrates, al geómetra académico Menaekhmo (tal vez guarde relación con su contribución al método de análisis y síntesis), e incluso a un «Aristóteles joven». La tercera es la opción tomada por el Aristóteles de los *Analíticos:* estriba en asegurar que no todo conocimiento científico, no toda tesis constituyente de una ciencia demostrativa, es un saber demostrado. En favor de esta posición obra la lógica misma de la demostración: si hay demostraciones efectivas en un marco discursivo dado, entonces obviamente no todas las proposiciones pueden ser demostrables dentro de ese marco.

Pero el problema no es sólo de orden lógico, sino también de

orden epistemológico. Por una parte, ¿cómo sabemos que efectivamente hay demostraciones? Aristóteles supone que las hay y, de hecho, alude a ciertas demostraciones matemáticas como casos harto familiares y conocidos —también Platón había prestado testimonio en tal sentido. A continuación podría argüir que podemos reconocer una demostración cuando nos encontramos ante ella dado que se trata de un silogismo *episthemonikós,* una deducción capaz de manifestar en sí misma su propia validez y su fuerza concluyente hasta el punto de que, conocida la verdad de las premisas, nos hace saber que sabemos. Dicho en otras palabras, siempre que constatemos la existencia de una demostración nunca tendremos la obligación adicional de demostrar que el argumento en cuestión constituye en efecto una prueba demostrativa. Por otra parte, ¿cuál será el tipo peculiar de conocimiento que convenga a los principios indemostrables? No podrá ser en ningún caso un saber demostrado. Pero si los principios fueran incognoscibles o su verdad fuera de suyo problemática volveríamos a estar a fin de cuentas sin el conocimiento científico bien fundado que esperamos de una ciencia demostrativa (no cabe pensar que la calidad y vigencia de una conclusión sea superior a la de sus premisas si éstas han de ser justamente la razón de que lo concluido sea así y no pueda ocurrir de otra manera, vid. *APr.* II 2, 53b8-10). Se trata de un punto delicado que plantea dos interrogantes: el antes formulado, «¿como se conocen tales principios?», y el ahora sugerido, «¿cómo se justifican, cómo reconocemos que no son infundados?». Dejaré esta discusión para más adelante. De momento, mientras vamos precisando la idea marco de conocimiento científico (demostrado) que acaricia Aristóteles, basta retener los tres supuestos que ya hemos declarado: el saber científico es finito por naturaleza; hay efectivamente demostraciones; por consiguiente, ha de tenerse constancia de unos principios indemostrables.

3.2 El conocimiento científico como saber demostrado (2).

Si α es una tesis demostrable de C, X sabe que α si y sólo si X conoce una demostración de α en C (*APo.* I 2, 71b28-29; II 3, 90b10, 22).

Dos condiciones necesarias para el conocimiento de una demostración ya son familiares: la condición de que X conozca una deducción silogística cuya conclusión es α, y la condición de que esta

deducción silogística dé cuenta y razón o explique que α es así y no puede ser de otra manera (*APo.* I 2, 71b10-19). A la luz de lo anterior podemos añadir un tercer requisito: la condición de que X conozca ciertas proposiciones previas de las que depende justamente α (*APo.* I 2, 71b20-25). Hemos de ser generosos en la comprensión de esta dependencia: no sólo consiste en la dependencia lógica que el nexo de consecuencia silogística hace contraer a la conclusión respecto de las premisas; también se trata de una dependencia epistemológica, tanto cognoscitiva como explicativa, puesto que el conocimiento de la verdad de las premisas, unido al reconocimiento de la cogencia, inherente al nexo silogístico, entraña el conocimiento de la verdad de la conclusión y, amén de esto, lo aducido en las premisas es la razón interna o la causa propia de lo sentado en la conclusión.

El pasaje indicado (I 2, 71b20-25), en el que Aristóteles avanza la caracterización global de esas proposiciones previas de las que dependen las tesis demostrables de una ciencia, es seguramente el más citado y popular de los *Segundos Analíticos*. Esa caracterización —corroborada por otros pasajes— de tales principios o proposiciones primeras *[arkhaí]* de las demostraciones y las ciencias demostrativas incluye unos rasgos más bien absolutos, determinados por la lógica de la demostración silogística, y otros rasgos más bien relativos al objeto de la prueba demostrativa.

Entre los rasgos —digamos— «absolutos» figuran los siguientes: los *arkhaí* han de ser (1) verdaderos; (2) primitivos o no derivables de tesis anteriores, entendiendo que una proposición α^* es primitiva si y sólo si no hay silogismo científico del que sea conclusión; (3) inmediatos, entendiendo que α^*, de la forma apofántica S-P, es una proposición inmediata si y sólo si no hay un término medio M tal que «MP, SM ∴ SP» es un silogismo científico. Es obvio que en el contexto de la demostración silogística los rasgos (2)-(3) equivalen a la indemostrabilidad de α^*. En suma, los *arkhaí* de las ciencias demostrativas han de ser verdaderos e indemostrables.

Los rasgos «relativos» en el sentido indicado se contraen a los siguientes: los *arkhaí* o las premisas, en general, de una demostración de la tesis α han de ser (4) explicativas del caso en cuestión; (5) prioritarias con respecto a α (6); mejor conocidas de suyo que α. Una exigencia envuelta por estas condiciones es el requisito de que las premisas de una demostración constituyan una explicación cabalmente pertinente del caso establecido en la conclusión (esta exi-

gencia recibirá la debida atención en el c. 7 de *APo.* I). Pero, de hecho, el cumplimiento de esta condición de atingencia o pertinencia resulta problemático y esta dificultad hace que el éxito de nuestra empresa de saber científicamente que algo es el caso no éste garantizado de antemano —pese a las virtudes cognoscitivas que adornan a esas premisas o principios—. «Es difícil estar seguros de que sabemos o no, porque nos es difícil asegurarnos de si sabemos —o no— a partir de los principios apropiados» (*APo.* I 9, 76a26-27). Aristóteles, en este punto como en algunos otros, parece menos dogmático de lo que sus epígonos y detractores suelen imaginar. La importancia de las condiciones relativas de una demostración científica también tiene que ver con la autonomía que Aristóteles atribuye a cada ciencia (incluso a las ordenadas dentro de una familia de ciencias, e.g. las matemáticas). Por ejemplo, un postulado geométrico será un *arkhé* primitivo de suyo pero no es una premisa explicativa o prioritaria respecto de α si α es una proposición perteneciente a una teoría cosmológica o biológica. Las ideas aristotélicas envuelven, en todo caso, alguna oscuridad. La caracterización anterior parece referirse de manera ambigua a las premisas de una demostración cualquiera, D, y a los principios *[arkhaí]* de la ciencia demostrativa C en cuyo ámbito tiene lugar esa demostración D. Una ambigüedad adicional es la que rodea a estos principios (sobre todo cuando son *arkhaí* comunes a diversas ciencias o supuestos del conocimiento científico en general), en la medida en que pueden oficiar como tesis primordiales a partir de las cuales *[ex hôn]* se demuestra algo o como principios deductivos a través de los cuales *[di'hà]* se demuestra algo. Esta ambigüedad forma parte de la idea aristotélica general de demostración , e.g.: «Hay una demostración cuando la deducción procede a partir de cosas verdaderas y primordiales, o de cosas cuyo conocimiento surge a través de cosas verdaderas y primordiales» (*Tópicos* I 1, 100a27-29).

En conclusión, de los rasgos que caracterizan las premisas o principios de una demostración científica resulta una noción de conocimiento demostrado como la siguiente. X sabe que α sólo si X conoce un silogismo o una cadena de silogismos $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ tal que:

(i) α es la conclusión de σ_n;

(ii) La conclusión de cada silogismo de la cadena σ_i —para $i < n$— es a su vez una de las premisas de un silogismo posterior σ_j —con $j \leq n$—;

(iii) Cada premisa de cualquier silogismo σ_i $(1 \leq i \leq n)$ es verda-

dera, explicativa, prioritaria y mejor conocida que la conclusión de σ_i;

(iv) cada premisa de un silogismo σ_i o bien es un principio primitivo e inmediato, o bien es la conclusión de algún silogismo anterior.

Por lo demás, todos los asertos apofánticos que componen el silogismo o los silogismos $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ son en principio proposiciones universales, verdades necesarias acerca del tipo de cosas considerado en la demostración (digo «en principio» para recordar que si bien el conocimiento científico se ocupa casi por definición de conexiones universales, necesarias y eternas —añadamos: según el paradigma real de las matemáticas o el modelo ideal de la teología—, Aristóteles no dejará de reconocer incidentalmente la presencia de conexiones que sólo se dan «en la mayor parte de los casos *[hos epì tò polú]*» dentro de algunas ciencias físicas). Con estos antecedentes pasemos a considerar las cuestiones antes apuntadas en torno al conocimiento de los *arhaí* de la demostración. ¿Cómo adquirimos conocimientos y tenemos constancia de ellos? ¿Cuál es su peculiar estatuto si han de fundar la demostración de conclusiones que, por norma, consisten en proposiciones universal o necesariamente verdaderas acerca de casos o acontecimientos de un tipo determinado?

3.3 El conocimiento de los principios.

De entrada conviene desmentir algunas interpretaciones extemporáneas. Se supone que tenemos conciencia de algunos de esos principios primordiales del conocimiento científico. Pero ésta no consiste en una especie de conocimiento *a priori:* no es desde luego un conocimiento innato (*APo.* II 19, 99b26-27; *Metaphys.* A 9, 993a1); ni estriba en un estatuto «analítico» de tales principios, su verdad no está simplemente en función del significado de sus términos pues «se han de conocer no sólo en el sentido de entender su significado, sino en el sentido de saber que son el caso» (*APo.* I 2, 71b31-33). Aunque alguno de ellos puede oficiar como presupuesto obligado del discurso racional —e.g. el principio de no contradicción, que se hace patente e infranqueable cuando intentamos violarlo—. Por añadidura, tampoco es cierto que Aristóteles considere estos principios como evidentes en sí mismos; quizás el primero en conferirles autoevidencia fuera Speusippo, uno de sus coetáneos, miembro de la Academia platónica; pero esta connotación gnoseológica sólo cobra

importancia y peso mucho más tarde —en la escolástica medieval— bajo el influjo de Boecio. Aristóteles se limita a asegurar que son cognoscibles de suyo (*APr.* II 16, 64b35) y dignos de crédito por sí mismos (*Tóp.* I 1, 100b20-22), pero no cree en la necesidad de apelar a una intuición mental inmediata que funda por sí sola u obtiene de sí misma la verdad de tales principios. Estima más bien que su caso es similar al de la demostración —donde no se requiere *apódeixis* de su cogencia apodíctica— y al del conocimiento científico en general —donde tampoco se ha de pedir *epistéme* de la *epistéme* misma (*APo.* II 19, 100b13-14).

Sin embargo, la postura aristotélica en torno al conocimiento de los principios o premisas primordiales no está clara del todo y ha suscitado diversas interpretaciones [8]. *APo.* II 19, en particular, es un nido de problemas. A tenor de 100b4-5, el conocimiento de los principios sería resultado de un proceso inductivo *[epagogé]* normal, semejante al que conduce a la aprehensión de los atributos y nexos universales en general. Este proceso cubre las etapas de la percepción o discriminación del caso particular o específico, puesto ante los sentidos; la retención de lo percibido en la memoria; la acumulación de estas observaciones y recuerdos de modo que generen un fondo relativamente unitario de experiencia; su precipitado es un universal y, al fin, se produce la captación de un atributo o un nexo interno que da lugar a predicaciones universales de clasificación o de conexión y, subsidiariamente, a la formación de conceptos explicativos teóricos. (No vendría mal anotar de paso el doble carácter de la inducción: de una parte inferencial y, de otra parte, argumentativo (*«lógos dialektikós»*, conforme a *Top.* I 12, 105a10-11); es, en todo caso, un proceso discursivo de depuración de lo universal que se haya entrevisto confusamente en los casos registrados.) Dentro de esta fase última, por lo regular, la aprehensión de una estructura inteligible en lo percibido se traduce primero en un universal *[kat-*

[8] Cf., por ejemplo, H. D. P. Lee (1935): «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», l.c., especialmente, pp. 119 ss.; J. M. Le Blond (1939): *Logique et méthode chez Aristote,* o.c., pp. 131 ss.; L. A. Kosman (1973): «Understanding, explanation, and insight in Aristotle's *Posterior Analytics*», en E. N. Lee, A. P. D. Mourelatos y R. Rorty, eds., o.c., pp. 374-392; J. H. Lesher (1973): «The meaning of ΝΟΥΣ in the *Posterior Analytics*», l.c., pp. 44-68; J. Barnes (1975), edic. c. de *Aristotle's Posterior Analytics* pp. 249-259; M. F. Burnyeat (1981): «Aristotle on understanding knowledge», en E. Berti, ed., o.c., pp. 93-137; V. Kal (1988): *On Intuition and Discursive Reasoning in Aristotle,* o.c.

hólou] predicativo o proposicional (*APo.* I 4, 73b26-27) y revierte luego en un universal conceptual o, digamos, en la formación de un concepto teórico definido —aunque no sea en el sentido de fijar simplemente el uso o el significado de un término general, sino en el sentido de acuñar su definición científica, explicativa, como cuando formamos el concepto «eclipse lunar» en los términos «privación de luz producida por la interposición de la tierra»—. Ahora bien, según 100b6-17, el conocimiento de los principios consiste justamente en una disposición o estado *[héxis]* un tanto peculiar denominado *«noûs»*. ¿Cómo se relaciona esta instancia decisiva de reconocimiento con el proceso inductivo?

A primera vista podemos temer que esta propuesta aristótelica resulte, en definitiva, inconsistente: el proceder genético y empirista de la inducción no casa demasiado bien con la captación inmediata y puramente intencional que suele atribuirse al *noûs* —ésta no sería, por lo demás, la única incoherencia apreciable en el planteamiento aristotélico: generalmente, el conocimiento de los principios se considera un caso de reconocimiento (de *gígnoskein*) y no de saber científico (de *epístasthai*), y por ende un caso de *noûs;* pero en alguna ocasión (*APo.* I 32, 88b37-89a1), se trata ese conocimiento como una variante de *epistéme* no demostrable y distinta del *noûs*—.

Tradicionalmente se ha preferido atenuar esa posible inconsistencia entendiendo que la vía inductiva, la *epagogé,* es una condición necesaria pero no suficiente para la aprehensión de los principios, de modo que resulta imprescindible el recurso al *noûs*, i.e. a una intuición puramente intelectual. En esta línea, una intuición de inspiración más bien platónica viene a implementar el método empírico e inductivo, genuinamente aristotélico. Hay otra línea de interpretación que procura hacer justicia a la coherencia empirista del pensamiento de Aristóteles. Dice que es conveniente distinguir dos cuestiones: una cosa es determinar cómo se accede al conocimiento de los principios, a saber: por vía de *epagogé;* la otra cuestión es determinar cuál es el estado que caracteriza tal conocimiento, a saber: el *noûs*, un estado de comprensión o de inteligencia. Recordemos que si X sabe que α y α es una tesis demostrada de C, entonces X tiene *epistéme* de α; pues bien, análogamente, si X conoce α^* y α^* es un principio o una tesis indemostrable de C, entonces X tiene *noûs* de C. Este punto de vista sortea el Escila de la incongruencia y el Caribdis de un maridaje platónico-aristotélico. Pero no deja de tener secuelas discutibles, e.g. la insistencia en el carácter meramente

expositivo, didáctico, de la teoría de la ciencia aristotélica por contraste con el carácter heurístico de su teoría —inductiva— del conocimiento; el *noûs* de las premisas o principios primordiales de la ciencia nada tiene que ver de suyo con una investigación o con una búsqueda, y se conforma con ser el correlato intencional de un feliz encuentro. Creo, sin embargo, que cabe dar una imagen más rica y mejor integrada de este *noûs* aristotélico.

Como en otros muchos casos, hemos de partir de ciertas ambigüedades. Los términos *«noûs»*, *«nóesis»*, *«noeîn»* llegan a Aristóteles envueltos en una compleja tradición de usos y significados, y el propio Aristóteles los emplea a veces de acuerdo con la tradición dominante en uno y otro contexto: e.g. *«nóesis»* equivale a «visión intelectual» en el contexto geométrico de *APo.* I 12, 77b31. Pero, al margen de esos usos que ahora consideraré marginales, el *noûs* puede significar la aprehensión de conexiones internas y explicativas, la captación de los universales pertinentes en el curso de una investigación que se dirige hacia premisas más básicas que las disponibles; en este sentido, hay una vinculación expresa entre *noeîn* y extraer un universal proposicional —que algo es así en todo caso— a partir de la percepción, en *APo.* I 31, 88a15-17; y así mismo se denomina *«arkhínoia»* (agudeza de *noûs*) la capacidad de descubrir, dados unos términos extremos, el término medio que explica su conexión mutua (*APo.* I 34, 89-b9-20), i.e. la capacidad de hallar o formar el concepto teórico correspondiente al caso planteado. Esta búsqueda del término medio pertinente, cuyo hallazgo representa el logro de una definición teórica o el logro de una explicación racional, es el tipo de investigación característico de la teoría aristotélica de la ciencia: lo buscado y, en el mejor de los casos, lo hallado no es la conclusión de un silogismo demostrativo, sino las premisas oportunas. Por otro lado, como ya sabemos, el *noûs* representa la aprehensión de los primeros principios o de las premisas primordiales en un dominio científico. En ambos sentidos, el *noûs* cumple un cometido congruente, complementario del que toca desempeñar a la heurística inductiva. Es el tipo de conocimiento exigido por los *arkhaí* de la demostración y de la ciencia demostrativa, pero no es una forma de conciencia intencional exclusiva de ellos; también puede convenir a otros universales teóricos, definitorios o explicativos. Podremos ver entonces el *noûs* y la *epagogé* como dos aspectos de una misma actividad cognoscitiva fundamental: la aprehensión de principios universales. La *epagogé* es su vertiente genética y metódica. El *noûs* es

su vertiente epistemológica: la disposición o el estado intencional que capta y fija el universal pertinente. Ya sabemos que no siempre podemos contar con tal estado de gracia. Pero es su mediación la que propicia el paso de la investigación a la demostración. Pues, aunque «la inducción es principio incluso de lo universal, mientras que el silogismo parte de lo universal; de ahí que haya principios de los que parte el silogismo que no se alcanzan por medio del silogismo, sino que se obtienen por inducción» (*EN.* VI 3, 1139b27-31), no es menos cierto que el *noûs* constituye asimismo una fuente de conocimiento. De esta virtud hay constancia implícita en *APo.* I 3, 72b24, donde Aristóteles alude a un principio del conocimiento de las definiciones, y hay constancia expresa en *APo.* I 33, 99b36, donde Aristóteles confiesa entender «por *noûs* un principio del saber científico *[arkhèn tes epistémes]*» (vid. también II 19, 100b15). Más todavía: el *noûs* es una fuente imprescindible del conocimiento científico si abre la vía de la demostración esencial de la naturaleza del caso considerado y, en atención a *APo.* II 7, 92b1-2, la argumentación inductiva sólo establece si el caso ocurre en verdad o no ocurre, pero no llega a determinar su naturaleza, i.e. muestra lo que hay pero no lo demuestra.

Si ésta es la manera de acceder al conocimiento de los principios, ¿qué tiene de particular tal conocimiento para instituirse como autofundado? En opinión de Aristóteles, el conocimiento inherente al *noûs* de los principios es un reconocimiento o una situación intencional que nos hace caer en la cuenta de que (1) tales *arkhaí* deductivos son efectiva y necesariamente verdaderos, (2) son los pertinentes para el caso en cuestión, (3) son aprehendidos de modo que no es preciso aducir una justificación ulterior de su estatuto o de sus atributos (1)-(2). Como ocurre con la demostración una vez realizada y reconocida, los primeros principios, una vez captados, son capaces de cuidar de sí mismos (*APo.* II 19, 100b13-14).

3.4 El orden de las cosas.

Las consideraciones precedentes en torno al sentido epistemológico del *noûs* de los principios indemostrables de la ciencia no son todo lo que hay que decir sobre el significado epistemológico de la idea aristotélica de demostración. Creo que, en una perspectiva general, la significación epistemológica de la demostración se cifra,

para Aristóteles, en ser la forma de reproducir o reinstaurar en el orden del discurso el orden inherente a lo real, su estructura inteligible. Será suficiente considerar el punto de la prioridad de las premisas y su mejor conocimiento con respecto a la conclusión de una demostración científica —cualidades relativas ya señaladas en § 3.1—. (Aquí hay, por añadidura, una cuestión insoslayable en la perspectiva antes abierta de la investigación dentro de una ciencia demostrativa: ¿cómo se explica que las premisas sean un objeto de investigación o búsqueda cuando tienen que ser justamente anteriores a la conclusión y mejor conocidas que ella?)

La relación anterior/posterior puede entenderse en muy diversos sentidos y, de hecho Aristóteles desarrolla en más de una ocasión sus variadas aplicaciones (cronológica, posicional, etc.). Pero su acepción fundamental, en la filosofía aristotélica, es de carácter ontológico: marca la relación de orden que corresponde a la prioridad natural, sustancial o causal de unas cosas sobre las otras. Un criterio al respecto puede ser el siguiente: dadas dos cosas cualesquiera, X e Y, X es prioritaria o anterior a Y si X puede darse en la realidad (o existir) con independencia de Y mientras que Y no puede darse con independencia de X (*Metaphys.* Δ 11, 1018b9 ss.).

Desde el punto de vista epistemológico, ese orden de prioridad se traduce en la relación entre lo anterior y mejor conocido, y lo posterior y peor conocido. Puede suponerse que lo prioritario y mejor conocido sea aquello que constituye un principio o una fuente de otros conocimientos. En este caso cabe un criterio como el siguiente: la idea o la proposición α es mejor conocida que la idea o la proposición β si el conocimiento β presupone de algún modo el conocimiento de α, y no a la inversa (e.g.: «las cosas mejor cognoscibles son los principios y las causas pues mediante ellas y a partir de ellas se conocen las demás cosas, pero a ellas no se las conoce por las cosas que les están subordinadas», *Methaphys.* A 2, 982b2-3). La dimensión subjetiva que tiene el conocimiento complica todo esto y Aristóteles se cree obligado a discernir dos maneras de resultar mejor conocido o cognoscible: hay por un lado lo que es mejor conocido o cognoscible de suyo *[kath'autó]*, absolutamente *[haplôs]*, por naturaleza *[phýsei]*; hay por otro lado lo que es mejor conocido o más accesible para nosotros *[kath'emâs, pròs hemâs]*. Consideremos por ejemplo el caso de la definición planteado en los *Tópicos*, VI 4. Las definiciones, si son apropiadas, dan a conocer algo a partir de otras cosas anteriores y mejor conocidas; por lo demás, esto mis-

mo ocurre con la demostración y en general con la enseñanza y el aprendizaje (141a25-36). Ahora bien, en términos absolutos, lo prioritario es mejor conocido: el punto es mejor conocido que la línea, la línea mejor que el plano y el plano mejor que el cuerpo sólido (141b27-33); y así una serie de definiciones correctas sería la siguiente: «el punto es la unidad que tiene posición», «la línea es lo divisible en una dimensión», «el plano es lo divisible en dos dimensiones», «el cuerpo sólido es lo divisible en tres dimensiones» (*Metaphys.* Δ 6, 1016b25 ss.). Sin embargo, con respecto a nosotros, el sólido es más perceptible que el plano, el plano más que la línea y la línea más que el punto. De manera que, al menos para quienes no estén en condiciones de seguir un orden riguroso, pueden valer definiciones del tenor: «el punto es el límite de la línea», «la línea es el límite del plano», «el plano es el límite del sólido» (141b17-22). El ajuste o los desfases entre lo que es prioritario y mejor conocido de suyo, por derecho, y lo que nos resulta a nosotros anterior y mejor conocido de hecho, son en principio contingencias que dependen de las circunstancias, del tipo y del grado de nuestra formación intelectual. No conviene entender esa posible disparidad en términos categóricos, pese a la oposición que marca *APo.* I 2, 71b33-72a5), entre lo universal (más alejado de la percepción pero mejor conocido de suyo) y lo particular (más próximo a la percepción y más accesible para nosotros), una oposición entre lo sensible y lo inteligible tan ajena al pensamiento aristotélico que este pasaje resulta sospechoso de interpolación [9].

Así pues, la distinción entre el orden genuino del saber y nuestro modo habitual de conocer puede revestir de hecho la forma de una distorsión o de una inversión: «Todo el mundo llega a las cosas mejor cognoscibles a través de lo que es peor cognoscible de suyo» (*Metaphys.* Z 3, 1029a34). La tarea del método científico es entonces obvia: consiste en «hacer cognoscible para nosotros lo que es cognoscible en sí» (*Ibd.*, 1029b7). Su sentido estriba en dos supuestos complementarios: en primer lugar, el orden propio de lo real tiene una estructura que cabe distinguir de nuestro comportamiento cognoscitivo; en segundo lugar, ese orden propio de lo real es perfectamente inteligible y cognoscible. El método científico conlleva así una suerte de investigación analítica o dialéctica de los supuestos

[9] P. Aubenque (1962): *El problema del ser en Aristóteles*, p. 63, nota 76.

sustanciales y estructurales de todo aquello con lo que ya contamos o nos es más familiar por experiencia. Y su misión culmina con una definición o una explicación adecuada y, en general, con una demostración científica. Es el silogismo demostrativo, a diferencia del razonamiento inductivo por ejemplo, el que sienta que algo es el caso a través del término medio pertinente, en razón de lo prioritario y mejor conocido por naturaleza (*APr.* II 23, 68b30-37). En suma, el cometido que toca desempeñar al método científico es emparejar lo primero en el orden de la naturaleza o de la realidad, lo primordial en el orden del conocimiento y los principios en el orden de la demostración y de la ciencia demostrativa.

La estructura de la demostración aristotélica viene así a corresponderse con el orden ontológico de lo real —en cada caso considerado—, tanto en lo que concierne a su carácter cerrado y finito como en lo que concierne a la disposición de las premisas y de la conclusión. En este sentido, es la forma óptima de discurso racional no sólo por su fuerza concluyente sino por su modo de exponer lo ya conocido en el orden justo del saber: a partir o a través de lo prioritario y mejor cognoscible en sí mismo. Y ahí alcanza su plena significación epistemológica: el establecimiento de una correspondencia cabal entre el orden básico de lo real y el orden del conocimiento discursivo, entre el *ordo essendi* y el *ordo cognoscendi*. De este modo, a la originalidad de la idea aristotélica de un conocimiento en sí para el que lo ontológicamente anterior resulta ser a la vez primordialmente cognoscible, responde una concepción no menos peculiar de la ciencia demostrativa [10]. En consideración a esta concepción parece injusto reducir la teoría de la ciencia al simple plano de una exposición didáctica de lo conocido; o cuando menos una reducción tal se prestaría a equívocos. La teoría de la ciencia aristotélica no sólo prevé una instrucción o una transmisión canónica de la doctrina científica establecida; también se hace la ilusión de enseñar a aprender en la medida en que contempla la ciencia como una «disposición demostrativa» (*EN.* VI 3, 1139b32). Pero, por un lado, este aprendizaje no es tan seguro como la previsión de una instrucción cumplida, de un saber logrado, nos invitaría a pensar. No siem-

[10] Vid. R. McKeon (1947): «Aristotle's conception of the developmet and the nature of scientific method», l.c., especialmente pp. 24-36. P. Aubenque (1962): *El problema del ser en Aristóteles*, o.c., p. 67; M. Matthen (1987): «The Structure of Aristotelian Science», l.c., pp. 9-10 en particular.

pre está garantizado el oportuno conocimiento en sí, no siempre se acierta en la selección de los principios pertinentes, y es la propia lógica interna de la exposición doctrinal la que demanda una investigación y unos resultados cogentes de la investigación —estados efectivos de *noûs*— a este respecto. Por otra parte, la disposición demostrativa de la ciencia también envuelve una heurística *sui generis:* la búsqueda de explicaciones cabales de lo que nos es más familiar. En este sentido, la teoría de la ciencia aristotélica tiene poco que ver con una idea hoy común de la investigación: la idea de que la investigación ha de proporcionar nuevos datos o más información empírica. Para Aristóteles, al menos en los *Analíticos*, la investigación consiste más bien en partir de los datos conocidos y encaminarse hacia lo prioritario de suyo y mejor cognoscible en sí mismo. Por curioso que parezca, esta orientación haría de Aristóteles un prototipo de buen empirista siempre que fuera cierto que el buen empirista es un metafísico con espíritu crítico (Feyerabend *dixit*). Lo que no admite duda, en todo caso, es que la perspectiva del conocimiento científico que abre Aristóteles hace de la demostración la forma más cumplida de explicación que podamos concebir. Esta conexión íntima o esta identificación entre la demostración y la explicación fundada es seguramente el legado más influyente y duradero de la teoría de la ciencia aristotélica.

3.5 Demostración y explicación.

Si la ciencia es el conocimiento establecido por vía de demostración (*APo.* I 4, 73a21-24), la ciencia es asimismo el conocimiento de la causa *[aitía]* del caso considerado (*APo.* I 2, 71b9-12). Esta concepción aristotélica recuerda un punto de vista ya avanzado por Platón: la conversión de una opinión verdadera en un conocimiento estable tiene lugar mediante la discriminación de la causa (*Menón*, 98a3). Es claro que *«aitía»* no significa en este contexto una causa en el sentido en que podría entenderla la filosofía moderna de la ciencia, como una condición necesaria y/o suficiente para que algo ocurra. «*Aitía*» significa más bien cualquier respuesta adecuada a una pregunta sobre el porqué de que algo sea tal o cual cosa, o se dé efectivamente de tal o cual manera [11]. Hay tantas *«aitíai»* como

[11] Vid. D. J. Allan (1965): «Causality ancient and modern», l.c., pp. 1-18; B. A.

maneras de expresar el porqué *[tò dià tí]* de algo (*Phys.* II, 18a15). Así pues, declarar la causa —en este sentido— de algo es dar razón de ello, dar una explicación. Por ende, tenemos conocimiento científico de algo sólo cuando conocemos su explicación (*APo.* I 2, 71b30-31).

Según esto, la caracterización del conocimiento científico en los términos de la demostración monta tanto como su caracterización en los términos de la explicación. X sabe que α sólo si (i) X conoce una razón o causa del caso α; (ii) X conoce que esta razón o causa es la explicación pertinente del caso α; (iii) X conoce que el caso α no puede ser o darse de otra manera.

En vista de la dualidad aristotélica del orden ontológico y el orden epistemológico, es de esperar que las causas representen principios de ser y principios de saber, i.e. determinantes ontológicos y modos de explicación. En la *Metafísica* aparecen tratadas como principios ontológicos. Allí Aristóteles específica cuatro determinantes clásicos de que algo sea como es: un determinante material o sustrato *[hypokeímenon]* de la cosa en cuestión; un determinante formal, la sustancia *[ousía]* o la esencia *[tò tí ên eînai]*; un determinante originario, la llamada «causa eficiente»; un determinante teleológico, la llamada «causa final» (*Metaphys.* A 3, 983a26-32). Dado que la causa formal es la que determina qué tipo de cosa es el objeto considerado, tiene cierta preeminencia como base de la necesidad y la inteligibilidad del caso en cuestión. Tampoco es extraño que la causa final goce de un estatuto similar y a veces se identifique con la formal, habida cuenta del determinismo teleológico que atribuye Aristóteles al orden natural: todas las cosas tienden a alcanzar y preservar su índole específica. La calidad de las causas como formas o modos de explicación se evidencia en el libro II de la *Física* —aunque no sea fácil establecer una correspondencia exacta entre este planteamiento y la concepción metafísica anterior (Aristóteles no es un filósofo tan sistemático como a veces se nos ha hecho creer). En el contexto de la *Física,* Aristóteles considera cuáles son las respues-

---

Brody (1972): «Towards an Aristotelian theroy of scientific explanation», l.c.; M. Hocutt (1974): «Aristotle's four becauses», l.c.; J. M. Moravcsik (1974): «Aristotle on adequate explanation», l.c.; J. Bogen (1974): «Moravcsik on explanation», ibd.; S. Gaukroger (1978): *Explanatory Structures,* o.c., II, ch. 4, pp. 83-133. Sobre otros aspectos complementarios también pueden verse R. Sorabji: *Necessity, Cause and Blame,* London, 1980, y J. Lear (1988), o.c., 2, pp. 15 ss.

tas a preguntas sobre el porqué del cambio o del movimiento. Las causas significan aquí pautas de explicación de los factores de un cambio y de los aspectos constituyentes del resultado del cambio. La causa material viene a ser un factor constitutivo a manera de soporte; la causa formal, un factor más bien estructural o, en ocasiones, funcional; la causa eficiente, un factor originario o productivo, por lo regular el responsable *[aítion]* externo del cambio; y la causa final, un factor teleológico que, en la naturaleza, es un determinante interno del orden natural. Estos cuatro puntos de vista pueden luego combinarse entre sí y con otros aspectos —e.g. con el carácter real o virtual, intrínseco o accidental, genérico o particular de la intervención causal— para dar lugar a otras varias modalidades explicativas; también pueden contraerse a un sólo núcleo causal, como ocurre, por ejemplo, en la explicación de la maduración animal: la cría ha sido generada por la forma de la especie a la que pertenece, realizada en su progenitor, y se desarrolla en orden a una plena actualización posterior de esa misma forma estructural y funcional cuyos atributos característicos ya posee. Los cuatro modos básicos de explicación también se hallan relativamente involucrados en la idea de explicación científica de los *Analíticos* (vid. e.g. 94a20-23).

En este marco específico las cuestiones que un investigador puede plantearse dicen relación a una proposición silogística dada, y son las cuatro siguientes:

a) *tò hóti:* el hecho de que se dé el caso α —i.e. el hecho de que a un sujeto dado, S, le convenga un predicado determinado, P;
b) *tò dióti:* el porqué, la causa o la razón de que se dé el caso α, de que a S le convenga P;
c) *eí estí:* si algo es, i.e. si hay S;
d) *tí estì:* qué es ello, i.e. qué es S (*APo.* II 1, 89b23-25).

Al abordar una cuestión **b**) suponemos resuelta la cuestión **a**) correspondiente, así como el planteamiento de la cuestión **d**) supone resuelta la cuestión **c**). Según esto, la explicación científica envuelve un desarrollo del conocimiento desde una noticia primera, verdadera pero genérica o limitada a la constatación de algo, hasta la comprensión cabal del caso dado. Por otro lado, el planteamiento de una cuestión **b**), «¿por qué α?», supone no sólo que α es de hecho verdad, sino además que α es efectivamente explicable dentro del orden natural de las cosas, en suma: puede darse un silogismo epistemo-

lógicamente apropiado —un conocimiento razonado— del caso α. Parejamente, la consideración de una cuestión **d**), «¿qué es S?», supone no sólo la existencia de algo tal, sino también su pertenencia a una clase de cosas o eventos susceptibles de identificación o tipificación, en suma: puede darse su definición propia. Estas cuestiones también presentan una articulación peculiar en el conocimiento razonado de que algo es el caso, en la explicación silogística pertinente. En este contexto, plantearse si se da el caso α, si S es P, equivale a indagar si hay un término medio M tal que S es efectivamente P puesto que S es M y M es P. Análogamente, preguntarse el porqué del caso α, por qué S es P, equivale a investigar qué es ese término medio M involucrado, cuál es su definición propia. Por ejemplo, supongamos la cuestión: «¿se ha producido un trueno?»; la pregunta equivale al interrogante «¿hay algo tal que al producirse se produce un trueno?» y la respuesta puede ser de un tenor semejante a: «todo ruido en las nubes es un trueno; lo que se ha producido es un ruido en las nubes; por lo tanto, lo que se ha producido es un trueno». Si la cuestión es, en cambio, «¿por qué se ha producido un trueno?», la respuesta exige una tipificación más apurada y precisa de ese ruido en las nubes que constituye un trueno: «todo ruido producido por la extinción del fuego en las nubes es un trueno». En el primer caso, basta una noción del término medio que nos permita constatarlo; en el segundo caso, se requiere además una definición característica, una explicación conceptual. Pero, en definitiva, las dos cuestiones mueven a una indagación acerca del término medio: a la investigación de si hay término medio, a la determinación de qué es el término medio (*APo.* II 2, 89b36-90a6). Esta condición de la explicación científica aristotélica se puede resumir como sigue: para dos casos dados cualesquiera, α_1 y α_2, α_1 explica α_2 sólo si hay una demostración silogística «AaB, BaC ∴ AaC» tal que «AaC» es la expresión de α_2 y «B» significa el concepto causal involucrado en α_1. Por ende la investigación causal, en este contexto, se cifra en una búsqueda del término medio; en palabras de Aristóteles: «el término medio es la causa y es en todo caso lo buscado» (*APo.* II 2, 90a7). La búsqueda del término medio no sólo marca esa investigación desde el punto de vista de su objeto, i.e. con arreglo al tipo de cuestión planteado, sino además desde el punto de vista del modo congruente de explicación, i.e. según el tipo de causa considerado, pues estos tipos de causa (formal, material, eficiente, final) también «se establecen mediante el término medio» (*APo.* II 11, 94a20-24).

Antes había señalado que la teoría aristotélica de la ciencia no debía reducirse a una mera forma de exposición, incluía asimismo cierta dimensión heurística. La investigación concerniente al término medio es justamente el núcleo heurístico peculiar de esta teoría de la demostración y de la explicación silogística: en el primer caso se trata de hallar o formar un concepto teórico que media entre los términos (sujeto y predicado) constituyentes de una conclusión, en el segundo caso este concepto viene a cumplir el cometido más concreto de un *definiens* causal.

Conviene reparar entonces en la diferencia sustancial que existe entre establecer un hecho y explicarlo: para explicarlo hace falta que el término medio no sólo sea pertinente sino explicativo, ha de consistir en un concepto teórico o una definición que distingan el hecho o caso en cuestión de otros del mismo género. Para establecer que se ha producido un eclipse lunar basta constatar el hecho de la privación de luz correspondiente, para advertir que los planetas están relativamente cerca de la tierra basta reparar en que no titilan pues sólo lo hacen los astros lejanos. Ahora bien, estas consideraciones no son propiamente explicativas: una es demasiado genérica, la otra sólo aduce una coincidencia general entre un fenómeno y una situación de proximidad o lejanía. Ambas se limitan a dar cuenta del caso, a una «explicación-*hóti* ». Las explicaciones genuinas son las que proporcionan una razón o una causa esencial del caso, una «explicación-*dióti*». Por ejemplo: la causa de que se produzca esa privación de luz que denominamos «eclipse lunar» reside en la interposición de la tierra; la causa de que los planetas no titilen radica en su proximidad. De aquí se desprende que una explicación propiamente dicha es, al igual que una demostración por lo prioritario y mejor conocido en sí, antisimétrica: si α_1 es la explicación del hecho α_2, α_2 no representa a su vez la explicación de α_1. Pero esto también implica que las explicaciones del porqué *[dióti]* envuelven una definición real y sustancial del caso considerado, no su definición meramente nominal (e.g. del tipo: llamamos «trueno» al ruido que se produce en las nubes, «eclipse lunar» a una privación de luz que sufre la luna); o envuelven, cuando menos, predicaciones esenciales y no simples constataciones accidentales o derivadas (e.g. del tipo: si un astro titila no está próximo a la tierra —pues, a juicio de Aristóteles, el fenómeno de titilar o no titilar no es la causa de una distancia relativa, sino al contrario—).

La idea aristotélica de explicación no deja de presentar algunos

problemas. El más aparente quizás sea la trivialidad de las aplicaciones que consideran los *Analíticos:* truenos, eclipses, astros que titilan, hojas —de higuera o de vid— que caen. Esta cosecha de ejemplos no evidencia un buen año de frutos científicos. Pero la trivialidad de los silogismos científicos, demostraciones y explicaciones, que apuntan los *Analíticos*, no significa que el análisis aristotélico —la remisión de lo que hay a sus causas internas, a sus principios constituyentes, a un orden natural de ser— sea trivial. (No menos banales suelen ser las aplicaciones que hoy, en la literatura metodológica, ejemplifican nuestras pautas más familiares de explicación, e.g.: el patrón nomológico-deductivo se ha aplicado con fruición a explicar por qué ha reventado el radiador del coche en una noche helada o por qué se ha roto un hilo del que pendía determinado peso). En cualquier caso, hay otros problemas, quizás menos llamativos a primera vista, pero más serios y característicos de la teoría aristotélica de la ciencia. Uno, en particular, es la cuestión de discernir entre predicaciones esenciales, explicativas de por qué α, y predicaciones accidentales, a lo sumo constatativas de que α. La idea aristotélica básica de demostración se atiene a silogismos compuestos por proposiciones universales de suyo y, por ende, necesarias, como ya hemos visto. Esto implica una distinción entre las predicaciones o conexiones esenciales de suyo *[kath'autó]* y las predicaciones o conexiones accidentales de hecho *[symbebekós]* (*APo.* I 4, 73a34-73b5). ¿Hay algún criterio decisivo al respecto?

Una predicación esencial puede tener lugar de dos maneras, según que la claúsula «de suyo» se refiera al sujeto o al predicado. En el primer caso, A se dice de B en cuanto tal, entendemos que A contribuye a la conceptualización sustancial de B de modo que este sujeto incluye dicho predicado en su definición real propia; por ejemplo, «el ser animal se predica de todo ser humano» es una predicación esencial de este tipo pues la definición de «ser humano» incluye justamente el término «ser animal», el concepto de ser humano implica el concepto genérico de ser animal. En el segundo caso, A en cuanto tal se dice de B, entendemos en cambio que B contribuye a la conceptualización de A de modo que este predicado incluye dicho sujeto en su definición; por ejemplo, «el ser un eclipse se predica de todo caso en el que la tierra resulte interpuesta», pues la definición explicativa del eclipse (e.g. lunar) envuelve precisamente la mención de tal causa. Cabe decir entonces que la diferencia entre una predicación de suyo, *kath'autó*, y una predicación incidental, *symbebekós*,

estriba en que la primera implica un término definitorio, e.g. «el hombre es animal» o «la línea contiene puntos», mientras que la segunda no, e.g. «un hombre es músico» o «la línea está dibujada en el suelo». Por consiguiente, la diferencia entre una explicación genuina de algo y su mera constatación radica en que el silogismo correspondiente a la primera envuelve un término medio definitorio. Una consecuencia de este planteamiento es la tesis aristotélica, harto familiar, de que no hay conocimiento científico de un caso singular; la explicación de un acontecimiento determinado, un eclipse o un trueno, no puede ser sino una explicación general de todos los sucesos de la misma clase o, mejor dicho, una explicación necesaria de este tipo de acontecimientos. Otra consecuencia es la siguiente: una explicación depende del tenor de la descripción (de la calidad definitoria o no de los términos) con que damos a conocer un caso, y estas posibilidades de descripción dependen obviamente del grado de desarrollo de nuestro conocimiento. Con todo, la perspectiva heurística de los *Analíticos* comporta una saludable confianza en que lo que hay es de suyo inteligible y lo que ocurre es, en principio, explicable. Confianza que, en el caso de Aristóteles, entraña dos fuertes convicciones: una de reducibilidad y otra de finitud. La convicción de reducibilidad consiste en la fe en que todo lo que buenamente conocemos puede retrotraerse a sus principios propios, mejor cognoscibles en cuanto a ellos mismos. En realidad esta fe, esta visión del *análisis* como **resolución** —de cualquier demostración concluyente en su forma silogística perfecta y de cualquier conclusión razonada en sus principios propios, deductivos y explicativos—, es la primordialmente expresada por el título, *«Analíticos»*, de estos tratados aristotélicos. La segunda convicción consiste en la creencia en que el conocimiento científico es finito y, en última instancia, el universo constituye un orden de cosas finito. Son aspectos que pueden quedar más claros al considerar los ingredientes y la estructura de una ciencia demostrativa. Pasemos pues a esta nueva dimensión, la dimensión metodológica, de la idea aristotélica de demostración.

4. *La dimensión metodológica de la idea de demostración.*

La dimensión metodológica de la idea de demostración cobra relieve a la luz del concepto de ciencia demostrativa que sugiere Aristóteles. Una ciencia demostrativa consiste en un conjunto finito

y ordenado de demostraciones silogísticas que versan sobre un género de cosas determinado. Los elementos necesarios y característicos de una disciplina de este tipo vienen a ser tres (*APo.* I 10, 76b11-22): a/ en principio cuenta con un ámbito de referencia que se supone realmente dado: el género de cosas o de objetos sobre el que la disciplina científica en cuestión hace sus demostraciones; b/ asimismo reconoce o asume ciertas proposiciones primordiales o básicas, de las que parten —o a través de las cuales se derivan— tales demostraciones; c/ consiste, en fin, en un cuerpo de proposiciones demostradas sobre los casos o los resultados conocidos que pertenecen al género de cosas o de objetos considerado.

Naturalmente, esta idea de una ciencia como un conjunto de conocimientos probados envuelve aspectos ontológicos —e.g. la suposición de que se da o existe el género referido, la posibilidad de la definición real de sus atributos esenciales—; también envuelve aspectos epistemológicos —e.g. el papel de principios de demostración o de explicación que toca desempeñar a las proposiciones indemostrables básicas tomadas como punto de partida—. Pero ahora tienen mayor relieve otros aspectos que podríamos considerar metodológicos en la medida en que dicen relación directa e inmediata a la exposición canónica del conocimiento científico, pues la idea de ciencia demostrativa está inequívocamente asociada en los *Analíticos* a una metodología de la exposición justificada —no a una metodología de la investigación, a pesar de las sugerencias epistemológicas en tal sentido que ya hemos apreciado—. Voy a destacar dos de esos aspectos, no sólo por su importancia singular sino porque tradicionalmente han centrado la discusión en torno a la significación «axiomática» de la teoría aristotélica de la demostración. El primero tiene que ver con la distinción y la caracterización de las proposiciones primordiales de las que ha de partir una ciencia de este tipo, un cuerpo finito de asertos demostrados. El segundo se refiere a la estructura deductiva de su exposición canónica.

4.1 Las proposiciones primordiales de la ciencia demostrativa.

Una ciencia demostrativa puede verse como un conjunto de proposiciones silogísticas compuesto por dos subconjuntos finitos y disjuntos entre sí: el de las proposiciones primordiales de la ciencia en cuestión, no demostradas, y el de las proposiciones derivadas o de-

mostradas. La naturaleza de éstas últimas no tiene mucho de particular: son conclusiones necesarias acerca de un tipo de cosas o de acontecimientos, o acerca de la existencia de un objeto cuya constitución responde a los atributos propios del género de cosas que estudia esa ciencia (e.g. son conclusiones que tipifican un fenómeno físico u orgánico, establecen resultados matemáticos o sientan la existencia de ciertos objetos previamente definidos como números pares, triángulos equiláteros, etc.).

Las proposiciones primordiales de una ciencia demostrativa pueden ser, en principio, de dos tipos. Están por un lado sus supuestos indemostrables y comunes; Aristóteles los denomina a veces *«axiómata»* siguiendo —dice él mismo— el uso de los matemáticos, aunque su calificación más corriente sea la de supuestos *comunes [tà koinà, koinaì dóxai].* Están por otro lado sus asunciones no demostradas y específicas, *tesis.*

Los axiomas constituyen los presupuestos del marco discursivo en que se mueven las demostraciones de la ciencia en cuestión y su reconocimiento es necesario para todo aquél que quiera saber algo al respecto. Un ejemplo frecuente de axioma es: «si de iguales se quitan iguales quedan iguales» (*APo.* I 10, 76a41; 76b20; 11, 77a31). Pero también comprenden principios del tenor: «de todo cabe el afirmar o el negar» (77a30). Esta ambigüedad ha dado lugar a dos interpretaciones: si la calidad de axioma se toma en un sentido absoluto, como parecen entender los comentadores aristotélicos, habrá que considerar que α es un axioma si y sólo si todo el que tenga conocimiento de algo, reconoce α; puede tomarse en cambio en un sentido relativo a una ciencia C y así α será un axioma de C si y sólo si todo el que conozca una proposición de C, reconoce α. En este sentido, la idea de que los axiomas son supuestos comunes recoge la posibilidad de una familia de ciencias que compartan tales supuestos, e.g. la aritmética y la geometría presuponen aplicaciones análogas del axioma antes citado (si de cantidades iguales se sustraen cantidades iguales, quedan restos iguales; si de magnitudes iguales se separan partes iguales, quedan restos iguales). Por extensión, toda ciencia ha de suponer los principios lógicos (e.g. el de no contradicción o el de tercero excluido, *Metaphys.* B 2, 996b26 ss.). La elucidación de estos presupuestos indemostrables tiene lugar en la filosofía primera (*Metaphys.* Γ 3, 1005a19-27; K 4, 1061b17-25).

Por lo que se refiere a las asunciones propias de una ciencia determinada, Aristóteles distingue entre las tesis que afirman que algo

efectivamente es o que no es, denominadas *«hypótheses»*, y las tesis que declaran lo que algo es de suyo sin otro compromiso, llamadas «definiciones» *[horismoí]*. Todas ellas son proposiciones inmediatas acerca del género de cosas considerado por esa ciencia: las hipótesis dicen que se da tal género de cosas, e.g. que hay unidades (aritméticas) o que hay puntos y líneas (geométricas); las definiciones declaran los atributos esenciales de las cosas de ese género, dicen qué es la unidad, qué es un punto, qué es un línea. Ambos tipos de asunciones parecen responder no sólo a la lógica de la idea de demostración, en general —como sería más bien el caso de los axiomas y los principios lógicos—, sino a la lógica silogística que rige la demostración canónica directa practicada por las ciencias demostrativas. Las demostraciones de este tipo son secuencias silogísticas fundadas en la transitividad de las relaciones que se dan entre sus términos: es la inserción interna del término medio pertinente la que viene a establecer y explicar la conexión entre el sujeto y el predicado de la conclusión. Desde este punto de vista, una línea canónica de demostración reviste la forma de una serie de silogismos de la primera figura que discurre desde el concepto más general del campo de conocimiento involucrado hasta la conceptuación más específica del caso demostrado; de ahí que las premisas primordiales hayan de consistir en asunciones inmediatas cuyos términos propongan la existencia de tal campo de conocimiento, i.e. el género de cosas o dominio de objetos de referencia, o den a conocer la naturaleza de los atributos básicos de los objetos pertenecientes a ese campo; luego, a partir de tales supuestos, será la mediación de las oportunas especificaciones internas, esenciales o explicativas, la que conducirá a una determinación concluyente del caso u objeto de la demostración [12].

La caracterización de constituyentes primordiales que he avanzado se encuentra sustancialmente en *APo.* I 2, 72a19-25. El texto no es muy preciso aunque algunos ven en este pasaje la intención

---

[12] Vid. H. D. P. Lee (1935): «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», art.c.; H. Hintikka (1972): «On the ingredients of a Aristotelian science», l.c., p. 55-69; W. Kullmann (1974): *Winssenschaft und Methode,* o.c., pp. 175-9 en especial; J. Barnes (1975), edic. c.,, pp. 103-4, 133 ss.; J. Hintikka (1980): «Aristotelian axiomatics and geometrical axiomatics», l.c; B. Landor (1981): «Definitions and hypotheses in *Posterior Analytics*», art.c.

de fijar unos usos relativamente técnicos. Desde luego no cabe esperar unas nociones estables e inequívocas acerca de los constituyentes primordiales de la ciencia demostrativa si se considera tanto el marco programático en que se mueven los *Analíticos*, como el escaso y fragmentario desarrollo que por entonces podía tener una teoría deductiva a pesar de la existencia de *Elementos* matemáticos y de contribuciones como la teoría de las proporciones de Eudoxo. (Mucho más tarde, cuando Proclo comenta los *Elementos* de Euclides, en el s. V, los griegos todavía no disponen de una terminología «axiomática» inequívoca a ese respecto).

Pero el grado de imprecisión y de labilidad de la terminología aristotélica es a veces alarmante. En su edición inglesa de los *Segundos Analíticos*, Barnes alcanza a discernir nueve clasificaciones de los ingredientes de una ciencia demostrativa, no todas ellas parejas ni enteramente coherentes (edic. c., pag. 138). Por otra parte, hay términos como *«hypóthesis»* esencialmente equívocos en Aristóteles —en el medio platónico y académico en general—. Ni siquiera la idea de definición, bastante más elaborada, responde a un criterio único sino que está a merced de su contexto conceptual o metódico de uso [13]. Por lo tanto no deberá extrañar que los *Analíticos* aseguren con parecida convicción que el principio de la ciencia demostrativa radica en las definiciones (e.g. *APo.* II 17, 99a22-23) o que reside en las hipótesis (e.g. *APo.* I 10, 76b3-16; II 19, 81b15). Y, en fin, bastaría repasar y cotejar las dos caracterizaciones más conocidas de los constituyentes primordiales de la ciencia demostrativa, el lugar citado de *APo* I 2 y el pasaje I 10, 76b35 ss., para dar no sólo con problemas de ambigüedad sino con visos de incoherencia. En *APo.* I 2, cabe entender que las hipótesis consisten en proposiciones con fuerza asertiva y un valor de verdad determinado: optan por la afirmación de que algo es el caso o por su negación; mientras que las definiciones, en cambio, se limitarían a declarar la noción de algo con el fin de hacerlo inteligible pero sin abrigar ninguna pretensión asertiva al respecto —rasgo que precisamente asigna *APo.* I 10 a lo que allí se llama *«hóros»* y algunos vierten por «definición»—. Pero

---

[13] Vid. J. M. Le Blond: «La definition chez Aristote», *Gregorianum*, 20 (1939), pp. 351-80 (recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1979): *Articles on Aristotle*. 3. Metaphysics, o.c., pp. 63-79).

entonces ¿qué hemos de pensar ante *APo.* I 2, 72a19-25, donde las hipótesis y las definiciones *[horismoí]* son tesis, premisas primordiales, y por ende tanto unas como otras constituyen proposiciones o asertos? (Análogamente: ¿cómo casamos las líneas 77a3-4, donde las hipótesis son universales o particulares mientras que las «definiciones *[hóroi]*» no son nada de eso, con las líneas 90b3-4, donde la definición *[horismós]* representa una proposición universal?) Una salida frecuentada por los comentadores aristotélicos es conferir a las hipótesis una condición estrictamente existencial y reservar para las definiciones un significado proposicional meramente predicativo. Sin embargo, es dudoso que Aristóteles fije aquí una demarcación estricta entre el sentido existencial de la hipótesis y el sentido predicativo o copulativo de la definición cuando tal distinción suele estar borrosa en su uso normal de *«eînai»*. La interpretación más razonable puede ser la siguiente. En los pasajes mencionados de los *Analíticos* las nociones de hipótesis y definición se emplean en un sentido amplio y en un sentido más restringido, casi «técnico». Una hipótesis, en sentido amplio, es cualquier premisa básica de la que siga una conclusión silogística (e.g. a tenor de 76b38-39) y su rasgo característico es el de ser una proposición primordial; con ella contrastan las definiciones entendidas como respuestas simples a la pregunta de qué es algo —es tal cosa o tal otra—, i.e. como predicados que tomados en sí mismos no aseveran nada ni son universales o particulares, y no constituyen una premisa hasta que no adquieren una forma proposicional completa, éstas son los *hóroi* (términos) que se consideran en 76b35-39 y 77a3-4. Ahora bien, en el otro sentido más restringido, una hipótesis es una asunción de que algo es efectivamente el caso de modo que esto comporta una implicación existencial— aunque no tenga un significado puramente existencial—; y a esta noción se opone la de definición *(horismós)* que asevera o «hipotetiza», según 94a9-10, lo que algo es y por ende también constituye una premisa, declara un atributo real del sujeto en cuestión aunque no se pronuncie sobre su posible existencia pues sentarla corre a cargo de la demostración correspondiente. En este sentido algo más preciso, las hipótesis y las definiciones representan dos clases de asunciones primordiales e inmediatas acerca de que determinadas cosas son y acerca de lo que son; tal es, por ejemplo, el proceder del matemático que asume no sólo que la unidad es sino lo que es (*APo.* II 9, 93b23-25).

En suma la consideración de los elementos «axiomáticos» de una

ciencia demostrativa, a tenor de los *Analíticos*, no da muchas facilidades para una reconstrucción de esta idea en el lenguaje de un método axiomático, en los términos precisos de lo que hoy podríamos ver como la axiomatización cabal de un conjunto determinado de proposiciones. Por ejemplo, Aristóteles es consciente de que unas nociones científicas han de ser definibles por medio de otras, hasta remitirse en última instancia a ciertos términos básicos e inmediatos; y está perfectamente al tanto de que la demostración de cualquier proposición científica ha de partir en última instancia de proposiciones indemostrables o no demostradas en el marco teórico dado. Pero esto no significa mantener expresamente nuestra distinción moderna entre los términos primitivos y los términos derivados, ni la distinción pareja entre los asertos o las tesis primitivas y las tesis derivadas de una teoría deductiva. Al margen de otras peculiaridades del planteamiento aristotélico, los criterios relativos al orden de la demostración —e.g. el criterio de prioridad cognoscitiva o explicativa— son epistemológicos antes que lógicos, formales o lingüísticos. Por otra parte, aunque Aristóteles preconiza la idea de una lógica subyacente en un cuerpo de proposiciones demostradas, no suele reconocer una distinción hoy tan familiar como la que media entre las reglas o pautas metalingüísticas de deducción y las proposiciones o tesis que componen el lenguaje de una demostración —con muy buena voluntad se podría leer una alusión a ella en pasajes como *APo.* I 11, 77a28-29, que distinguen entre los principios que se usan para hacer demostraciones y aquéllo sobre lo cual se hacen tales pruebas o aquéllo que es objeto de prueba. Las distinciones capitales para la teoría de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* son: **a**) La observada entre unos elementos primordiales *[tà próta]* y otros elementos derivados, demarcación que responde a una asociación de motivos ontológicos, epistemológicos y lógicos; **b**) la introducida entre los elementos comunes *[tà koiná]* y los elementos propios o específicos de la ciencia en cuestión, distinción que guarda una relación más directa con motivos de orden metodológico.

4.2 La estructura deductiva de la ciencia demostrativa.

Voy a aventurar no obstante una versión relativamente sistemática de la idea aristotélica de ciencia demostrativa con el fin de poner

de relieve su estructura deductiva y entresacar algunas de sus condiciones estructurales más características [14].

Sea Γ un conjunto de proposiciones silogísticas. Γ es una ciencia demostrativa si constituye un cuerpo ordenado de asertos que satisface condiciones como las siguientes:

1. Toda proposición de Γ hace referencia a un dominio determinado de objetos o de entidades reales (*APo.* I 6, 75b1; 10, 76b13).

2. Hay en Γ un subconjunto finito Γ* de proposiciones primordiales tales que

2.1 Si α* pertenece a Γ*, α* es indemostrable y constituye un axioma común o una asunción específica de Γ (72a15-25; 76a31-35).

2.2 Si α* pertenece a Γ*, α* es una aserción verdadera, inmediata, necesaria, explicativa, prioritaria y mejor conocida en sí misma (71b20-25).

2.3 Si α* pertenece a Γ* y es un axioma común será por lo regular un principio lógico del que se sirvan las demostraciones en Γ (77a26-28)

2.4 Si α* pertenece a Γ* y es una asunción específica de Γ entonces:

> (i) α* hará referencia a un dominio singular, a la existencia de un género de cosas dado o a la constitución de sus atributos esenciales, siempre que Γ sea una ciencia singular pues una ciencia se distingue como tal por su género propio, y la ciencia Γ será diferente e independiente de otra ciencia Δ siempre que α* no pertenezca a Δ (87a38-b1);
>
> (ii) si α* hace referencia a un dominio determinado, entonces toda aserción α de Γ derivable de α* hace referencia a casos u objetos que caen dentro de este mismo dominio (75a38-b21; 87b1-4).

3. Hay en Γ un sistema lógico subyacente, común a los distintos campos del conocimiento científico y carente de género propio (77a26-33), a saber: el sistema silogístico, capaz en principio de convalidar —por reducción a los silogismos de la primera figura— las

---

[14] Las reconstrucciones de este tipo se remontan al trabajo clásico de H. Scholz (1930): «Die Axiomatik der Alten», reimp. c., pp. 27-44. Vid. también E. W. Beth (1950-51): «Critical epochs in the development of the theory of science», l.c., pp. 27-28 en especial; Beth (1959): *The Foundations of Mathematics*, o.c., pp. 31-32; J. Berg: *Bolzano's Logic*. Stokholm/Göteborg/Upsala, 1962, 1966 [2]; vi 6, pp. 161-2.

cadenas deductivas formulables en los términos del sistema (79a16-32).

3.1 Si α pertenece a Γ, α es demostrable a partir de Γ* mediante una cadena silogística finita (*APo.* I 19-23, 81b10 ss.).

Si se admite esta reconstrucción de la idea de ciencia demostrativa, nos permitirá descubrir unas condiciones estructurales de suma importancia para la delimitación y comprensión de la teoría aristotélica de la demostración.

Entre estas condiciones merecen destacarse las siguientes:

(a) Una condición de **realidad**, expresada en el punto 1 de la reconstrucción propuesta: toda ciencia hace referencia a un ámbito real. Naturalmente esto se aplica a los objetos de las ciencias matemáticas: son objetos que se dan en la realidad física pero están tomados no como cosas dotadas de atributos físicos sino como objetos que satisfacen los predicados congruentes con una conceptualización y una abstracción aritmética o geométrica, e.g. tienen la propiedad de ser uno o la propiedad de ser una esfera (*Metaphys.* M 3, 1077b18-1078a31; *Phys.* B 2, 193b23-194a12) [15].

(b) La condición de un **orden de inteligibilidad,** expresada en el punto 2.2, que responde a la propia estructura de la realidad y al convencimiento de que ésta es verdaderamente inteligible, cognoscible en sí misma, según hemos podido ver al considerar la dimensión epistemológica de la concepción aristotélica.

(c) La condición de **autonomía y homogeneidad** del cuerpo de conocimientos que constituye una determinada ciencia, formulada en el punto 2.4. También se puede percibir aquí —como en el estatuto no puramente ideal que Aristóteles confiere a los objetos matemáticos— una alejamiento respecto de la ortodoxia platónica: a la imagen platónica de un saber convergente hacia una sola cúspide de principios (quizás, en última instancia, la idea de Bien), Aristóteles opone la trama multidisciplinaria de las ciencias que atienden a las diversas maneras de darse y de decirse lo que hay. La diversificación de las ciencias y la autonomía de cada disciplina dentro de su ámbito propio de investigación es seguramente el legado aristotélico más influyente en el desarrollo de la ciencia helenística; no sólo inspiró

---

[15] Vid. J. Lear (1982): «Aristotle's Philosophy of Mathematics», l.c., pp. 161-192; (1988): *Aristotle: the desire to understand,* 6 §2, pp. 231 ss. Cfr., sin embargo, I. Mueller (1970): «Aristotle on geometrical objects», art. c., y J. Annas: *Aristotle Metaphysics M and N,* Oxford, 1976, pag. 29 en particular.

la polymathía del Liceo, sino que llegó a institucionalizarse en las nuevas comunidades científicas, e.g. la de Alejandría. Por otra parte, la propuesta autonómica de Aristóteles también da lugar a una primera aproximación a la clasificación de las ciencias en disciplinas básicas —e.g. aritmética, geometría, física, biología, medicina—, disciplinas subordinadas —e.g. la harmónica respecto de la aritmética o la óptica respecto de la geometría— y, en fin, familias disciplinarias —e.g. familia matemática—.

(d) La condición de **finitud** del conocimiento científico, derivada de los puntos 2 y 3.1. El análisis de la idea misma de demostración ya descartaba de entrada un conocimiento discursivo infinito. Recordemos que, en el medio platónico y académico, el conocimiento demostrativo es un caso específico de conocimiento discursivo racional: si sé que α, mi conocimiento de α se funda en alguna razón β, cuyo conocimiento descansa a su vez en el conocimiento de una premisa anterior γ, y así sucesivamente (Platón ya había advertido este regreso en *Teeteto*, 209e-210b; era una posibilidad inherente a la convicción general de que todo conocer parte de o supone algún conocimiento previo). Las reacciones —de que tenemos noticia— ante el problema coincidían precisamente en excluir la idea de un conocer infinito, por más que discreparan acerca de la viabilidad o naturaleza del conocimiento demostrativo: unos al parecer lo juzgaban imposible; otros le atribuían un carácter circular; Aristóteles, en fin, piensa que no todo es suceptible de demostración y que la existencia de proposiciones demostradas descansa en último término en la existencia de principios indemostrables. Sin embargo, la condición de finitud de la ciencia demostrativa tiene ahora un significado positivo y concreto. Cada premisa de una demostración de una ciencia Γ es o bien una tesis indemostrable o bien una conclusión de una demostración anterior. Ahora bien, Γ sólo tiene un número finito de tesis indemostrables, conforme al punto **2**; y toda cadena silogística, demostrativa, es finita, según el punto **3.1.** Luego, el conjunto de teoremas o proposiciones demostradas de Γ es finito. En suma, una ciencia Γ es un cuerpo finito de conocimientos.

Una consideración importante, en este planteamiento, es la desarrollada por Aristóteles en los cc. 19-23 de *APo.* I: no puede haber cadenas silogísticas de longitud infinita (deducciones silogísticas con infinitos pasos o infinitos miembros), así que no puede haber cadenas demostrativas de longitud infinita. La cuestión capital es mostrar que las cadenas silogísticas que se compongan de asertos afirmativos

no pueden ser infinitas (como la demostración silogística de una conclusión negativa también envuelve alguna premisa afirmativa, las secuencias que contengan alguna proposición negativa no serán infinitas a menos que lo sean las secuencias de proposiciones afirmativas —*APo.* I 25, 86b10-15, 24-36—, por lo que su caso es reducible al planteado; motivos análogos inducen a reducir el caso de las proposiciones particulares al de las universales —de premisas únicamente particulares no se sigue una conclusión silogística, al igual que no se sigue de premisas exclusivamente negativas—. Veamos cómo aborda Aristóteles esa cuestión crucial. Una cadena de asertos afirmativos puede ser infinita en razón de alguna de las tres posibilidades siguientes (*APo.* I 19, 81b30 ss.):

(i) La secuencia parte de un sujeto que no se predica en Γ de sujeto alguno, de modo que tiene la forma <AaB, ΓaA, ΔaΓ...> y así continúa indefinidamente. Esto equivale a suponer que la secuencia tiene un término de referencia, B, y puede haber infinitos términos que lo «precedan» en un orden de predicación.

(ii) La secuencia parte de un predicado que no puede ser sujeto de predicación alguna, de modo que reviste la forma < AaB,BaΓ, ΓaΔ... > y así continúa indefinidamente. Equivale a suponer que la secuencia tiene un término de referencia, A, y puede haber infinitos términos «subsiguientes».

(iii) La secuencia contiene una proposición no inmediata de la forma «AaΩ» y entre sus términos caben infinitas mediaciones <AaB ... XaΩ >. Es decir, «A» y «Ω» son términos tales que admiten infinitos términos medios entre ellos.

Aristóteles juzga que las posibilidades (i)-(ii) quedan excluidas en razón de la imposibilidad de una serie infinita de predicaciones esenciales, imposibilidad fundada en el orden natural que subyace como referencia de los sujetos y los predicados de tales predicaciones: las cosas sólo tienen un número finito de atributos definitorios. Por lo demás, las predicaciones no esenciales vendrían a ser parasitarias de las esenciales y así mismo finitas (*APo.* I 22, 82b37 ss.). Pues bien, la exclusión de (i)-(ii) comporta la exclusión de (iii) (*APo.* I 20, 82a22-35). En suma, las cadenas silogísticas de una ciencia demostrativa no pueden se infinitas. Al margen de si la argumentación aristotélica de *APo.* I 19-23 es convincente o no en todos sus extremos —que no lo es; vid. el detenido análisis de J. Barnes en la edic. c. (1975): *Aristotle's Posterior Analytics,* pp. 161-173—, tiene interés

reparar en que la cuestión suscitada en (iii) no es del mismo orden que las correspondientes a (i)-(ii): no es tanto una cuestión de finitud como de densidad. Sin embargo, la argumentación aristotélica de que la negación de (i)-(ii) implica la negación de (iii) puede significar una prueba un tanto peculiar de la «compacidad» de la deducción silogística: si α es deducible silogísticamente, α es la conclusión de una deducción silogística finita. Tampoco estará de más advertir que, en el curso de su argumentación en el c. 22, Aristóteles no se conforma con incurrir en la tesis general de que una demostración sólo puede tener un número finito de pasos, sino que además se precipita en las tesis complementarias de que sólo hay un número finito de objetos susceptibles de demostración y, en definitiva, sólo puede haber un número finito de verdades científicas —está claro que, sin ir más lejos, la idea que Aristóteles podía hacerse de la aritmética elemental distaba de parecerse a la nuestra—.

Una observación final. Las reconstrucciones de la idea aristotélica de ciencia demostrativa suelen incluir una condición de «evidencia», relativa a las tesis primordiales. Creo que su mención carece de fundamento en los *Analíticos* [16]. Por otra parte, la alusion a un concepto tan cargado de connotaciones gnoseológicas como el de evidencia tiende a provocar algunos otros equívocos sobre la concepción aristotélica de las verdades primordiales, e.g. induce a suponer que el conocimiento de tales verdades sólo puede ser directo e intuitivo. Sin embargo, conviene sentar de una vez por todas que la noción psicológica o gnoseológica de evidencia nada tiene que ver con la idea aristotélica de lo mejor conocido de suyo, cuyas connotaciones son ontológicas y epistemológicas, ni con la idea de lo que es convincente por sí mismo y no precisa por ende una deducción previa, cuyas raíces son argumentales y dialécticas. Por último, tampoco está de más recordar que la captación o el reconocimiento de tales principios no es tan simple como si de una mera intuición se tratase: puede suponer a veces una *epagogé* previa y, en otras ocasiones, una elucidación discursiva de su condición de presupuestos

[16] Es sintomático que Scholz, uno de los responsables de este infundio, haya de recurrir para justificarlo (1930: «Die Axiomatik...», p. 265) a una versión sesgada del término «pístis», como «evidencia», en un pasaje de los *Tópicos* (I 1, 100b18-20). Lo que dice Aristóteles en este contexto dialéctico es que las verdades primordiales son aquellas que deben a sí mismas su *pístis* (el crédito que merecen o su poder de convicción). Constituyen supuestos racionales comunes o son verdades fundamentales en el marco discursivo dado.

necesarios (e.g. como ocurre en *Metaphys.* Γ a propósito del principio de no contradicción). En todo caso, envuelve una conceptualización adecuada a su cometido como principios teóricos de una ciencia, sea en la vertiente lógica de principios de demostración, sea en la vertiente sustantiva de principios de explicación. La muestra más ilustrativa a este respecto son las definiciones: suponen un análisis de los constituyentes del objeto definido, —pues para Aristóteles no cabe partir de naturalezas o sustancias simples a la manera de Descartes—, y una síntesis inteligible que da a conocer en qué consiste tal objeto; en otras palabras, no representan un paso natural desde una percepción confusa a una iluminación clara y distinta, sino el resultado metódico de un trabajo analítico. Este trabajo puede presentar diversas modalidades, puede discurrir por la vía del análisis sustancial en materia y forma, o por la vía del análisis causal, o por la vía de un análisis aparentemente taxonómico en ocasiones y otras veces funcional según se tomen los conceptos de género, especie y diferencia en diversos contextos —e.g.: en el contexto más bien clasificatorio de los *Tópicos,* donde el género es una unidad de contrarios diferenciados como especies *[eîde]* entre las que caben analogías proporcionales, o en el contexto más bien explicativo del tratado *Sobre las Partes de los Animales* donde el género comprende diferencias graduales entre partes *[moîrai],* debidas a rasgos físicos poseídos en un orden de más o menos (*PA.* I 4, 644B11-14). Por otro lado, ese trabajo también puede incluir fases diversas, como las sugeridas en *APo.* II 10, 94a11-14, en la línea de una investigación progresivamente demostrativa y explicativa de lo que una cosa es hasta culminar en su definición primordial e indemostrable.

5. *El sentido del programa aristotélico.*

Cuando intentamos comprender el sentido del programa cuyas dimensiones hemos considerado, nos encontramos con dos dificultades principales. Una es un problema de contextualización. La otra es un problema de significación o, si se quiere, de motivación. Ambas cuestiones están estrechamente asociadas.

Como ya sabemos, el marco en el que aparece la teoría de la demostración científica de los *Analíticos* es un medio configurado por diversos estímulos y motivos. En términos muy sumarios podemos recordar tres que guardan especial relación con el programa

aristotélico. Hay, por un lado, unas primicias matemáticas, geométricas, de demostración directa y de exposición sistemática de resultados probados; han empezado a circular unos tratados de *Elementos* y se conocen teorías generales como la teoría de las proporciones; la tradición de la prueba de teoremas parece asentarse de forma semejante a como antes se había asentado la tradición de la resolución de problemas. (No deja de ser significativo, por ejemplo, que las referencias al proceder matemático por análisis y síntesis se muevan en Aristóteles dentro del contexto netamente proposicional de la prueba de teoremas, donde importan más las relaciones entre las premisas y las conclusiones que las relaciones entre los datos o las condiciones de un problema y su posible solución; vid. también más adelante, c. IV §§ 1.1, 1.2.). Por otro lado, la Academia platónica es un medio propicio y fértil de encuentro entre las tradiciones filosófica, dialéctica, matemática que han precipitado el desarrollo de la argumentación y de la prueba; este mismo círculo alimenta las primeras discusiones —acompañadas de alguna que otra idea confusa— en torno al conocimiento científico y la idea de demostración. Aristóteles no se siente en absoluto ajeno a estas cuestiones; por el contrario, es el «académico» mejor dotado y más dispuesto a hacerse cargo de ellas y procura tratarlas de modo relativamente sistemático, como una labor pareja a la emprendida en el ámbito general de la teoría de la argumentación; en este sentido, podría haber añadido a los *Analíticos* consideraciones parecidas a las que encarecen su propia fundación de la teoría de la argumentación, al final del apéndice *(Sobre las refutaciones sofísticas)* de los *Tópicos,* donde señala que las contribuciones más difíciles y decisivas son las que marcan el desarrollo inicial de un campo de estudio (183b16 ss.); éste es el caso de la contribución de los *Analíticos* a la teoría de la demostración, terreno tan virgen como podía serlo el de la teoría de argumentación. En fin, es obvio que Aristóteles participa ejemplarmente de una de las preocupaciones áticas más características desde la época de la primera ilustración sofística y mejor atendidas por Platón y la Academia: la preocupación por las condiciones del discurso racional y las vías de la investigación discursiva. También en este ámbito la participación de Aristóteles resulta singular y decisiva.

Una peculiaridad de Aristóteles en este marco es su vocación y oficio de lector *[anagnostés],* su debilidad por el discurso repasado y por el texto escrito. Esta actitud es sintomática del desplazamiento que tiene lugar en el objeto discursivo: pasa de ser materia de dis-

cusión y de diálogo, en la que se recrea el lenguaje vivo, a adquirir también la condición de materia de estudio y de tratado *[pragmateía]* donde puede revestir la objetividad de lo que está y queda escrito, la consistencia del pensamiento materializado en escritura. La escritura representa, subjetivamente, un reto y un estímulo para el trabajo de conceptualización a la vez que, objetivamente, sirve de soporte para la atribución de valores definidos de verdad o falsedad (lo aseverado se fija por el simple hecho de haber sido dicho; no exige un compromiso personal suplementario, como el que Sócrates trataba de arrancar a sus huidizos interlocutores, pues tampoco es fácil apearse de lo dicho sobre la marcha —con un «déjeme que le explique»— sin bordear la incoherencia, ponerse en evidencia o desdecirse). La escritura representa sobre todo la base de una normalización discursiva como la que ha de suponer una teorización del método deductivo. A la estabilidad de lo escrito como cosa dicha de una vez para siempre se une su ductilidad como objeto siempre susceptible de una recontextualización sistemática. Y así Aristóteles puede comportarse ante las opiniones y propuestas anteriores a la manera no de un historiador sino de un naturalista del conocimiento: son fenómenos [*phainómena*, e.g. *EN* VII 1, 1145b2] para la disección dialéctica, de modo que ya no interesa el significado que esas tesis hayan tenido para los antiguos ni su contexto originario; sólo interesa precisar si esas tesis son verdaderas y ver cómo se articulan en torno a los problemas que la naturaleza misma de las cosas plantearía desde el punto de vista de una investigación sistemática. Además, y este aspecto cobra ahora el mayor interés, la condición —digamos— material de posibilidad del análisis lógico y de la normalización «axiomática» de un cuerpo de conocimientos no es una plasmación lingüística cualquiera —e.g.: la que sigue el hilo del relato o la que corre el albur del diálogo vivo— sino una materialización lingüística textual, una fijación por escrito, del conocimiento objeto de estudio. En todo caso, lo cierto es que la preocupación ática y académica por el discurso argumentado adopta en Aristóteles la forma más precisa de la búsqueda de un canon de la exposición racional del conocimiento, en general, y de la exposición textual de las disciplinas científicas en particular, donde el orden de la temática tratada, la pragmateía, ha de obedecer —entre otros motivos por el desirátum sustancial de inteligibilidad— al orden de constitución interna de las cosas mismas, de las prágmata.

5.1

Pues bien, en este amplio marco en el que concurren motivos dialécticos, influencias platónicas, muestras matemáticas, al tiempo que se van sedimentando nuevas actitudes hacia el discurso y la crítica racional, puede situarse la idea aristotélica general de la deducción concluyente, su noción genérica del $silogismo_1$, y su idea básica de una apodíctica que descansa en la necesidad de dar cuenta y razón —por sus principios propios— de las cosas que hay. También parecen responder a ese sugerente marco algunas caracterizaciones concretas de los principios primordiales dentro de su concepción programática de la ciencia demostrativa (e.g.: las nociones de axioma o de hipótesis suelen presentarse en términos dialécticos, e incluso didácticos, mientras que su contenido hace referencia al empleo de estas nociones en matemáticas o se muestra a través de ejemplos típicamente matemáticos; pero, por otro lado, las nociones de hipótesis y de definición también tienen ciertas raíces filosóficas, especialmente platónicas y académicas).

Lo que ya no se deja situar con facilidad en este contexto es la idea técnica de silogismo, el $silogismo_2$, y su conversión en un patrón básico no sólo para la convalidación lógica de la demostración sino para la exposición racional del conocimiento científico propiamente dicho. Recordemos que a tenor de *APr.* I 23, 40b23-25, se considera necesario que en toda demostración y en todo silogismo se haya de probar la conveniencia o no conveniencia de algo con otra cosa, sea en sentido universal o sea en sentido particular. Por ende, la deducción canónica silogística tiene que discurrir en términos generales, sobre la base de nexos de pertinencia y de relaciones de transitividad, y es obvia la prioridad que corresponde a los modos de la primera figura: sólo ésta admite conclusiones de las cuatro formas señaladas en la cita anterior (el ser tal o cual conviene o no conviene a un tipo de cosas tomado en toda su extensión o en parte de su extensión). El traer a colación en este punto una fuente única de inspiración de entre las comúnmente estudiadas (la platónica, la dialéctica, la matemática), para explicar esas convicciones aristotélicas, sería forzar una explicación no sólo sesgada sino, a fin de cuentas, genérica [17].

---

[17] Las muestras más claras de indeterminación o de explicación vaga y genérica se dan entre quienes defienden una inspiración netamente platónica. Vid. algunas sugerencias constructivas al respecto en G. E. L. Owen (1965): «The platonism of

La fuente más plausible viene a ser la incipiente tradición de la prueba matemática —geométrica, en especial— de teoremas. Se han aducido al respecto varios y diversos motivos: la afinidad del sistema silogístico con el tipo de proposiciones y de organización teórica usual en geometría; la ventaja de contar sobre esta base con una interpretación unitaria y consistente del conjunto de los *Segundos Analíticos;* la posibilidad de explicar tanto el alto nivel de exigencia que Aristóteles impone al conocimiento científico como la abundancia de las referencias e ilustraciones matemáticas en los propios *Analíticos.* Sin embargo, todos estos motivos que, coaligados y a primera vista, adquieren un considerable peso, pierden algo de esta fuerza tras ser examinados y contrastados uno por uno. Así: la afinidad que más salta a la vista no es la que guarda el silogismo canónico con las pruebas geométricas, sino la que mantiene con ellas la argumentación informal que Aristóteles aduce cuando trata de establecer ciertas características de su sistema; es decir, no son las pruebas silogísticas, sino las metasilogísticas las que recuerdan el lenguaje y los usos deductivos de los geómetras —la utilización de letras o abreviaturas pronominales para los objetos mentados, el uso de la reducción al absurdo y de otros recursos no silogísticos de deducción, incluso el empleo de giros lingüísticos con el cuño de modismos matemáticos (e.g.: «si los términos son universales, habrá un

Aristotle». l.c., pp. 14-34. No pocos estudiosos del *Organon* se inclinan sin embargo por una fuente dialéctica de inspiración y de contextualización de los *Analíticos:* en esta perspectiva, la lógica dialéctica y la analítica cumplen tareas ciertamente diversificadas, pero complementarias, y sobre todo comparten una raíz común. Dentro de esta línea de interpretación, vid: E. Kapp (1931): «Syllogistik», recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 35-49; E. Weil (1951): «La place de la logique dans la pensée aristotélicienne», reimp. en *Essais et conférences* (París, 1970), pp. 44-70; J. Barnes (1969): «Aristotle's theory of demonstration», en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 65-87. Otros, en fin, tienden a privilegiar su matriz matemática o geométrica, bien a la luz de las afinidades entre los términos lógicos aristotélicos y el vocabulario matemático de la época (a partir de B. Einarson (1936): «On certain mathematical terms in Aristotle's logic»); bien en razón de otras afinidades estructurales con la deducción geométrica, e.g.: H. Scholz (1930): «Die Axiomatik der Alten», l.c., pag. 27; W. y M. Kneale (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica,* edic. c., pp. 5-6; W. Leszl; «Mathematics, axiomatization and the hypotheses», en E. Berti, ed. (1981), o.c., pp. 271-328. La versión más sesgada en esta línea es la de R. Smigh (1978): «The mathematical origins of Aristotle's syllogistic», quien asegura que el sistema de *APr.* I, 4-7, es una teoría matemática (p. 205) y en los *Primeros Analíticos* se halla la «primera obra matemática completa» (*sic,* pag. 209) griega conocida.

silogismo siempre que ...; pero no en otro caso. Pues, predíquese M de ningún N pero de todo X. Entonces, como la premisa negativa es convertible, N se predicará de ningún M. Pero se supone que M se predica de todo X. Por consiguiente, N se predica de ningún X, lo cual ya ha sido antes probado», *APr.* I 5, 27a2 ss.). Por otra parte, a la tradición de la prueba geométrica cabe oponer otra tradición filosófica y dialéctica mucho más marcada en el círculo platónico, la *sképsis en toîs lógois,* la investigación discursiva. Asimismo, frente a la ventaja de una interpretación unitaria de los *Segundos Analíticos*, cabría vindicar la conveniencia de una interpretación comprensiva del *Organon* entero donde vuelven a ser más oportunas unas claves dialécticas. Por último, la frecuencia de los ejemplos matemáticos se torna menos llamativa en un cotejo proporcional con los ejemplos tomados de otros ámbitos [18]. En conclusión, me parece que los motivos en favor de una inspiración netamente matemática no llegan en conjunto a ser decisivos ni, menos aún, a ser excluyentes [19]. Así pues, por lo que concierne a esta fuente de inspiración comúnmente resaltada, creo que podemos contentarnos con esto: hay un aire de familia, desde luego, entre la teoría aristotélica y algunas prácticas matemáticas de su entorno, pero no existe un vínculo genealógico directo entre las pruebas geométricas y el silogismo aristotélico, como tampoco hay un lazo de filiación entre los tratados de *Elementos* y el programa «axiomático» de su ciencia demostrativa.

Algo parecido cabría pensar de los demás candidatos a fuente decisiva de inspiración. Por ejemplo, la impronta dialéctica se deja

---

[18] J. Barnes, en su (1969): «Aristotle's theory of demonstration» (l.c., p. 70, nota 32), presenta este cálculo de ejemplos matemáticos y no matemáticos:

APr.	I: 13 matem. /136 no matem.	*APo.*	I: 50 matem. /36 no matem.
	II: 6 matem. / 56 no matem.		II: 19 matem. /46 no matem.

Las matemáticas prevalecen sobre cualquier otra disciplina particular. Pero también conviene anotar que en la exposición y desarrollo del sistema silogístico, en *APr.* I, no abundan tanto los casos matemáticos: en los cc. 1-12 hay 4 por 56 no matemáticos; en 13-22, O por 35; en 23-46, 9 por 45. Y a esto hay que añadir la dificultad de reducir las pruebas matemáticas a silogismos.

[19] Así se desprende del examen crítico de J. Barnes en el art. c. (1969): «Aristotle's theory of demonstration». Algunos estudiosos lúcidos de la inspiración matemática de la teoría de la ciencia aristotélica ya reconocían otras influencias, como la dialéctica; e.g.: H. D. P. Lee (1935): «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», l.c., pp. 113-34. Un planteamiento general de la cuestión, puede verse en mi (1984): «El incierto sentido de la teoría aristotélica de la ciencia», *Contextos*, II/4 (1984), pp. 27-47.

sentir en el tono expositivo y didáctico que adopta la presentación del saber científico dentro de esta teoría de la ciencia —a expensas de otros aspectos que modernamente se consideran más significativos, como los relacionados con la investigación y con la construcción de teorías—. Pero esta marca dialéctica y sus connotaciones instructivas tampoco resultan decisivas si se tiene en cuenta que una tonalidad didáctica similar acompaña, según Proclo, a la tradición matemática de la confección de *Elementos* y de hecho constituye uno de los rasgos que dan un perfil disciplinario a los *Elementos* de Euclides.

El silogismo canónico de los *Analíticos* tiene todos los visos de ser una invención propiamente dicha. Basta considerar sin ir más lejos la dificultad de explicar en esos términos contextuales el papel paradigmático que Aristóteles confía a los modos silogísticos de la primera figura y sobre todo al modo «Barbara». Los silogismos de la primera figura son los más científicos, dice Aristóteles en *APo.* I 14, 79a16 ss., por varias razones, a saber: las ciencias matemáticas y casi todas las ciencias explicativas llevan a cabo sus demostraciones con arreglo a esas formas lógicas (79a18-20); son tales silogismos los que se sientan el porqué del caso considerado (79a21-24); sólo un silogismo en Barbara depara el tipo de conclusión —afirmativa y universal— necesario para la demostración de lo que algo es esencialmente (79a24-29); y, en fin, los silogismos de la primera figura son autosuficientes en orden a reducir cualquier proposición dada a sus premisas inmediatas [*ámesa*, i.e. premisas cuyos términos guardan entre sí una conexión que excluye la mediación ulterior de algún otro término]. Ahora bien, la primera razón es palmariamente falsa a la luz de los textos y de las referencias disponibles hoy sobre la matemática o la ciencia griegas de la época de Aristóteles. De manera que, en realidad, Aristóteles se atiene a su propia concepción programática de la demostración y de la ciencia demostrativa antes de que a algún otro motivo externo de inspiración o de referencia. Es el inventor de las reconstrucciones racionales en filosofía de la ciencia y metodología. Por otro lado, al señalar las ciencias matemáticas (aritmética, geometría, óptica) y las explicativas, en general, como cumplidas muestras del proceder silogístico, Aristóteles no está significando lo que hacen —salvo error o espejismo— sino lo que han de hacer en la exposición canónica cabal de sus resultados probados y explicados. En esto y en el papel especial asignado a una prueba en Barbara estriba buena parte del sentido programático de su teoría

de la demostración. (Recordemos, no obstante, que Aristóteles no asociaría este sentido «programático» a la contemplación de una meta ideal, externa y regulativa, sino más bien al cumplimiento de la naturaleza propia del conocimiento científico: el *télos* de la exposición silogística «axiomática» no parece ser otro que la maduración de la forma genuina, del «*tò tí ên eînai*» diríamos, de una ciencia demostrativa. Así pues, tanto más curiosa ha de resultar su aparente acontextualidad y falta de aplicación). Y, por último, la autosuficiencia técnica de los silogismos de la primera figura es un motivo de orden lógico, sistemático, que de suyo poco tiene que ver con los motivos reales que han podido inspirar a los hacedores de pruebas deductivas en las matemáticas, la física o la filosofía.

5.2

El propio Aristóteles es una buena muestra de lo que acabo de decir y, en atención a sus usos y prácticas, todavía podemos apurar algo más la intrigante ausencia de contexto del programa aristotélico.

En vista de la frecuencia de algún que otro malentendido [20], recordaré ciertas sugerencias aventuradas anteriormente. Para empezar, cabe distinguir entre la teoría madura y estricta de la ciencia demostrativa que recomienda el libro I de los *Analíticos* y otras consideraciones metodológicas más laxas o informales que aparecen ocasionalmente y no sólo en los *Analíticos*. Esta teoría estricta es sustancialmente la compuesta por las dimensiones lógica (silogística),

[20] Vid. J. Barnes (1969): «Aristotle's theory of demonstration», l.c., pp. 66 ss. La fuente principal de confusión es, a mi juicio, la tendencia a tomar la filosofía de la ciencia o la metodología aristotélicas como un bloque unitario y homogéneo que se puede identificar bien con la doctrina oficial de los *Segundos Analíticos* —como hace el propio Barnes en el artículo citado—, o bien con otras consideraciones aristotélicas más informales u ocasionales —como parecen hacer algunos críticos recientes de Barnes, e.g. A. Gotthelf, J. G. Lennox, R. Bolton, en A. Gotthelf y J. G. Lennox, eds. (1987): *Philosophical Issues in Aristotle's Biology*, o.c. De ahí se siguen pronunciamientos parejamente indiscriminados sobre las relaciones entre «*la*» teoría y las prácticas aristotélicas: sea en el sentido de que no guardan entre sí ninguna relación, sea en un sentido enteramente contrario. Pero antes de precipitarse en conclusiones de este tipo convendría revisar el supuesto de que la concepción aristotélica de la ciencia y sus métodos constituye una doctrina única, definida y sistemática en todos sus extremos: cf., por ejemplo, W. Leszl (1980): «Unity and diversity of the sciences...», art. c.

epistemológica y metodológica que hemos venido examinando. Es además la que conviene programáticamente a la ciencia demostrativa por antonomasia, bien que en tal calidad represente una especie de «descripción» racional vacía y no haga referencia sino a un cuerpo de conocimientos o una disciplina científica realmente inexistente. En cambio esas otras consideraciones podrían corresponder a una apodíctica aristotélica quizás anterior al desarrollo del sistema silogístico (vid. supra, § 1.1), pero sobre todo responden a una actitud más respetuosa con la variedad real de las ciencias y con las diversas demandas de un proceso efectivo de investigación y de explicación, actitud que es habitual en el pensamiento de Aristóteles. Si hubiera que resumir en dos las directrices más características y estables del pensamiento metodológico aristotélico, destacaría las siguientes: para saber efectivamente algo hemos de conocer la prueba y la explicación de que tal cosa es el caso, y hemos de reconocer que no es posible que las cosas de este tipo sean de otra manera (e.g. *APo.* I 2, 71b10-13); pero no hay que buscar del mismo modo el rigor en todas las cuestiones sino, en cada una, según la materia del caso y conforme al grado apropiado para su investigación específica (e.g. *EN* I 7, 1098a27-29). ¿Son conciliables ambas directrices? ¿No es cierto, por ejemplo, que el programa de *APo.* I se mantiene olímpicamente al margen de las investigaciones y de las exposiciones aristotélicas mismas? Pero, ¿este programa define cabal y unívocamente todo lo que Aristóteles piensa sobre la ciencia y sus métodos?

Al principio (vid. supra, § 3.1) ya había apuntado que cabe entender la ciencia aristotélica como una de esas cosas que se dicen de muchas maneras: su sentido preeminente es el de la ciencia demostrativa programática (ciencia que Aristóteles parece buscar en *APo.* I entre las disciplinas matemáticas), sin que este sentido canónico impida reconocer otros sentidos análogos que convienen a otras disciplinas científicas del tipo de la física o de la biología. De hecho, Aristóteles reconoce expresamente en más de una ocasión las similitudes y las diferencias que hacen del modo de la demostración y la necesidad *[ho trópos tês apodeíxeos kai tês anágkes]* un proceder análogo en matemáticas, física y biología. En *Phys.* II 9, 200a13-b4 (un pasaje similar se encuentra en el *De Partibus Animalium* I 1, 639b21-640a9), explica que las pruebas matemáticas y otras pruebas científicas (físicas, biológicas) coinciden en proceder con una necesidad pareja [*paraplésios*, 200a16] a partir de alguna propiedad primordial de un tipo de cosas, pero discurren al revés [*anápalin*, 200a19],

en la medida en que el punto de partida de la demostración matemática es algo dado absolutamente desde un principio mientras que el punto de partida de la demostración y de la explicación física o biológica puede ser una causa final, aquéllo que viene a ser tal o cual cosa, y ello da lugar a una especie de necesidad hipotética y retroductiva: los objetos de las pruebas y de las explicaciones biológicas vienen a ser tales o cuales según sea el fin tal o cual (200a19-20). Por otra parte, a la luz del pasaje paralelo de PA I 1, el modo de demostración y de necesidad de las ciencias físicas y biológicas también podría distinguirse del que tendría lugar en una disciplina sobre los objetos de producción (y no ya de generación): en el primer caso nos las habemos con una necesidad natural —pues la cosas pueden obrar movidas tanto por una finalidad como por una necesidad (*APo.* II 11, 94b35-36)— y podemos partir de algo que efectivamente es —pues el proceso de generación y maduración de un ser vivo ya viene virtualmente implicado en su forma seminal—, mientras que en las obras humanas o en los productos del arte sólo cabe contar al principio con una idea del resultado que se espera alcanzar, con algo que aún no es sino que será en el futuro *[tò esómenon]*; sin embargo, incluso en este contexto práctico podemos reconocer un modo de explicación y de racionalización necesaria. En todos estos casos (disciplinas matemáticas, físicas, biológicas y prácticas), cabe aspirar a deducciones igualmente legítimas y cogentes. Siguiendo por esta línea podríamos concluir en un concepto primordial y unitario, «focal», de saber científico: el saber que algo es necesariamente el caso —bien por necesidad absoluta, bien por necesidad hipotética (la necesidad de lo que ocurre o se hace con vistas a un fin)— a partir de los principios que presiden un campo determinado de conocimiento. La distinción entre el programa canónico —estrictamente silogístico— de la ciencia demostrativa, antes considerado, y esta concepción menos rígida, que ahora estoy glosando, es un presupuesto importante para diagnosticar la menor o mayor contextualización de la teoría aristotélica de la ciencia: el primero, a diferencia de lo que parece ocurrir a veces con la segunda, constituye una invención bastante singular en un marco general extra e intra-aristotélico.

Pues el programa de los *Segundos Analíticos* no sólo discurre al margen del entorno aristotélico. La verdad es que tampoco guarda relación con la investigación sustantiva, filosófica o científica, del propio Aristóteles. No tiene mucho que ver con la argumentación

y la exposición que él mismo hace de sus análisis y elucidaciones, con sus pronunciamientos sobre problemas heredados o ante nuevas aporías, o con la presentación de los resultados a que cree llegar y de las explicaciones que sugiere o propone; ni cuadra con la clara tendencia aristotélica a reconocer un pluralismo metodológico y a cuestionar la presunción de una metodología justa y precisa, universal y uniforme, para todas las ramas del conocimiento científico.

En suma, ningún heleno hizo alguna vez —que se sepa— ciencia demostrativa silogística. En otras palabras: de haberse perdido los tratados que componen el *Organon* y, en particular, los *Analíticos*, ni sus comentadores posteriores ni nosotros mismos tendríamos razones apenas para suponer que Aristóteles hubiera elaborado un concepto relativamente técnico de demostración silogística y de ciencia silogísticamente demostrativa; menos aún podríamos sospechar que se hubiera sentido tan satisfecho de su elaboración como para dejarse deslumbrar alguna que otra vez por este invento [21].

Sin embargo, cabe pensar de modo algo distinto si tomamos como punto de referencia no ese programa metodológico sino la concepción más genérica de ciencia como saber ordenado y concluyente, deductivo y explicativo, que antes habíamos creído distinguir. En este sentido cabe reconocer que la investigación aristotélica parece tomar a veces dicha dirección hasta el punto de que la teoría aristotélica de la ciencia llega a tomar tierra en algunos tratados sustantivos. Recordemos, por ejemplo, las relaciones entre la demostración y la definición planteadas a partir de una discusión general sobre la manera como llegamos a averiguar lo que algo es (*APo.* II 8, 93a15 ss.). Aristóteles distingue tres funciones de la definición (10, 94a11-14): la que desempeña como conclusión de una demostración de lo que es tal cosa (e.g.: así cabe explicar que el trueno es un ruido producido en las nubes como consecuencia de alguna otra característica más sustancial o primordial, 94a7-9); la que cumple como prueba explicativa de lo que una cosa es, aduciendo esta característica primordial (i.e., que el ruido se produce debido a la extinción del fuego en las nubes, 94a5-7); la que desempeña, en fin, como exposición básica e indemostrable de lo que algo es (i.e., el trueno es justamente el ruido del fuego al extinguirse en las nubes). Leído así este pasaje da a entender una especie de plan de investigación;

---

[21] Vid. J. M. Le Blond (1939): *Logique et méthode chez Aristote*, o.c., p. 432; J. Barnes (1969): «Aristotle's theory of demonstration», l.c., p. 66.

pues bien, esto no sólo significa que los *Analíticos* también abrigan pretensiones y directrices heurísticas, sino que supone un vínculo de la teoría con ciertas investigaciones de Aristóteles en dominios científicos concretos: una línea semejante a la propuesta en este pasaje es la que, al parecer, sigue Aristóteles en su conceptualización del esperma en el tratado sobre la *Generación de los Animales,* I 7, 721a30 ss.

Otros puntos metodológicos de la concepción aristotélica, en particular los relativos a la investigación de estructuras causales más o menos sistemáticas y a la investigación analítica de conceptos definitorios y diferenciales, también parecen tener mayor conexión con su propia labor filosófica y científica. Un índice de esa conexión puede ser precisamente la transformación que padecen en el curso de este trabajo heurístico y analítico —y ello, una vez más, contrasta con la espléndida clausura de la teoría programática que permanece ensimismada, intacta, en los *Analíticos*—. Es ilustrativa la suerte de los procedimientos de diferenciación y del análisis de diferencias *[diaphoraí]* como objetos de explicación o como factores de explicación. Empiezan teniendo un marco conceptual y ontológico de desarrollo en las *Categorías* y los *Tópicos:* gracias a él se despegan de los primeros usos platónicos de la diaíresis y de algunos abusos académicos posteriores. Luego Aristóteles, en los *Analíticos* (e.g. *APo.* II 13, 97a28-20) o en la *Metafísica* (e.g. Z 13, 1038a9-20), ya considera un orden de diferenciación sucesiva donde la diferencia específica última implica las precedentes: este criterio preserva la pertinencia de las divisiones clasificatorias y garantiza la significación del proceso de definición —por ejemplo, una subdivisión de los animales dotados de pies no tiene sentido en los términos «animales gregarios/solitarios» sino a través de diferencias del tenor de «animales bípedos/cuadrúpedos», y la noción de hombre como animal bípedo implica la noción de animal provisto de pies—. Sin embargo, en el tratado *Sobre las Partes de los Animales,* la investigación aristotélica refina o abandona ese punto de vista lógico-taxonómico en aras de intereses más precisos, descriptivos y explicativos, y viene a reconocer una pluralidad de diferencias simultáneas —de modo que un animal consiste en un complejo de atributos que no se dejan presentar en una sola línea de determinación o de clasificación, e.g. *PA* I 2 642b7, 3 643b26— [22].

---

[22] Vid. D. M. Balme: «Aristotle's use of division and differentiae», en A. Gotthelf

5.3

El problema de la contextualización de la teoría aristotélica de la demostración incide sobre la cuestión de su posible sentido. Este resultará tanto más problemático cuanto más incierta sea la existencia de un contexto propio y definido, ya se trate de un contexto externo de inspiración o ya se trate de un contexto interno de uso o de aplicación por parte del mismo Aristóteles. Así pues, la cuestión del sentido del programa estricto de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* será la que revista tintes más problemáticos. Un punto que tiene especial interés, no sólo en sí mismo sino en razón de las interpretaciones y discusiones que ha suscitado, es el de determinar el sentido y alcance de la propuesta de «axiomatización» que envuelve esa teoría de la ciencia demostrativa. Como esta referencia a una «axiomatización» puede prestarse a equívocos —que, por cierto, luego se proyectan sobre la «axiomática» eculídea y sobre las posibles relaciones entre los *Analíticos* y los *Elementos*—, no estará de más partir de unas consideraciones preliminares.

Una axiomatización viene a ser, en general, una organización estructural de un conjunto de conocimientos como una teoría deductiva; este recurso permite armar un cuerpo teórico, identificar sus conceptos y tesis capitales, perfilar las ideas de prueba deductiva y de orden de deducción en la teoría y, en suma, convertir la teoría en un objeto preciso de análisis metateórico. Tradicionalmente suele considerarse esa identificación de los conceptos y de las tesis de una teoría el rasgo más característico del método axiomático. La identificación de los conceptos de la teoría supone una distinción entre los términos primitivos y los demás términos definibles directa o indirectamente mediante ellos; la identificación de las tesis supone una distinción entre las asunciones primitivas y las demás proposiciones demostrables directa o indirectamente a partir de ellas. T es una teoría axiomatizable si es un conjunto ordenado de proposiciones, hay un subconjunto finito A_T de proposiciones designadas como axiomas (o tesis primitivas de T) y cualquier otra proposición de T es derivable de A_T por medios puramente lógicos. El uso del método

---

y J. G. Lennox, eds. (1987), o.c., pp. 69-89. En G. E. R. Lloyd: *Demystifying Mentalities* (de próxima aparición en Cambridge University Press), podrán verse otros motivos que hacen difícil la reducción de la investigación biológica aristotélica al programa canónico silogístico.

axiomático descansa en la existencia de criterios lógicos y metodológicos de selección de los axiomas y de organización de la urdimbre deductiva que ellos tejen, estos criterios pueden llegar a la formalización de las reglas de definición y de deducción que, por lo regular, operan implícitamente en la teoría.

El desarrollo del método axiomático ha cubierto dos fases históricas principales: la correspondiente al dominio de la que llamaré «axiomática **clásica**» y la correspondiente a la implantación de la llamada «axiomática **moderna**». La axiomática clásica adelanta una especie de manifiesto en el ensayo *De l'esprit de la géometrie* de Pascal (hacia 1657) pero posterga sus realizaciones plenas y maduras hasta el s. XIX. Cuenta con criterios lógicos y metodológicos de selección de axiomas (e.g. con la condición de que los designados sean los mínimos suficientes a los efectos de la definición y de la deducción de los resultados conocidos en el ámbito de la teoría), pero al mismo tiempo depende de criterios informales de reconocimiento (e.g. supone que el título de verdad incontestable y el certificado de la evidencia intelectual son rasgos distintivos de un axioma). Dada esta calidad de verdades evidentes y primeras que caracteriza a los axiomas, esta axiomatización clásica proporciona teorías concretas, directamente referidas a un campo determinado de la realidad (de ahí que la geometría clásica, por ejemplo, haya sido a veces calificada de «geometría física»).

La axiomática moderna es la inaugurada por los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899). Renuncia a los anteriores criterios informales de identificación de las proposiciones primitivas de una teoría deductiva y abre el nuevo horizonte del estudio de las propiedades formales y estructurales de las teorías mismas (esta perspectiva transforma la noción de axioma: si α es un proposición primitiva de T, lo que le confiere un estatuto axiomático no es alguna virtud absoluta de α —e.g. su calidad de verdad evidente— sino su papel relativo en la conformación misma de esa teoría —e.g. siendo T una teoría coherente, la supresión o la negación de α implicarían el abandono de T o su sustitución por otra teoría distinta—). La teoría que resulta de este tipo de axiomatización es una teoría abstracta: acota un ámbito estructural de aplicabilidad y determina no conceptos de primer orden, referidos a los objetos de un sector concreto de la realidad, sino conceptos de segundo orden que cabe entender a la manera de funciones que toman como dominio de definición un conjunto de sistemas homólogos de objetos, cada uno de

los cuales constituye el universo de referencia de una interpretación posible de la teoría abstracta (este contexto es el que da sentido a los axiomas de «existencia» destinados a postular la disponibilidad de objetos que satisfagan una función o una condición estructuralmente descrita).

Es obvio que la «axiomatización» sugerida por Aristóteles nada tiene que ver con la axiomatización moderna. ¿En qué sentido podemos decir entonces que la teoría aristotélica envuelve una propuesta «axiomática»? ¿Son los *Analíticos* precisamente el acta fundacional del método axiomático clásico? O, planteada la cuestión en términos más generales, ¿cuál es el papel de los *Analíticos*, si alguno desempeñan efectivamente, en la historia de lo que vengo llamando «la axiomática clásica»?

A mi juicio, los *Segundos Analíticos* representan una especie de primicia teórica y programática, virtual, del punto de vista axiomático. Pero no constituyen el acta fundacional de la axiomatización clásica; ni siquiera son un precedente histórico del método axiomático clásico. Este honor de primicia práctica corresponde si acaso a los *Elementos* de Euclides (vid. c. 4 § 3.3).

La teoría aristotélica contiene dos distinciones básicas: la existente entre unas tesis primordiales *[tà protá]* y todas las demás; la existente entre los principios comunes a todas las ciencias *[tà koiná]* y los específicos de una ciencia o de una familia de ciencias (vid. supra, § 4.1). Los criterios de distinción en ambos respectos no son sólo lógicos o metodológicos sino que, como ya hemos visto, también descansan en supuestos ontológicos y epistemológicos. El germen de organización deductiva que estas distinciones conllevan tiene asimismo su raíz en prioridades extralógicas: en el orden de las cosas y en el orden de su inteligibilidad intrínseca. Cierto es que la selección de los principios se ha de atener a criterios de suficiencia y adecuación (según las condiciones **3.1** y **2.4** señaladas anteriormente, en § 4.2). Pero lo que se sigue de ahí es la finitud de los correspondientes cuerpos de conocimiento antes que una restricción metódica del número de los principios (en *APr.* I 32, 88b4-5, se niega expresamente que el número de las verdades primordiales sea mucho menor que el de las conclusiones derivables de ellas). Por otra parte, el reconocimiento de los principios depende de la disposición epistémica debida y, en última instancia, se supone que es un reconocimiento obligado *[anankathoménos]* por la verdad misma de las cosas (pueden verse referencias en este sentido en contextos tan diversos como

Metaphys. A 3, 984b10, *Phys.* I 5, 188b29, o *De Part. Anim.*, 648a18-20), cuando no se trata de un presupuesto racional absolutamente general —como el principio de no contradicción—. No obstante, esos mismos supuestos determinan para Aristóteles la impersonalidad objetiva de la exposición doctrinal y constituyen una base de la normalización disciplinaria que ha de acompañar a la presentación sistemática de un cuerpo de conocimientos científicos: podemos recuperar nuevamente el horizonte de la organización y de la exposición deductiva de las ciencias demostrativas. Más aún, Aristóteles tiene a veces visos hipotético-deductivos: no faltan pasajes en que su uso de «hypóthesis» cobra este sentido (e.g.: en *APo.* I 10, 76b38-39, una hipótesis es del tipo de proposiciones «tales que si son el caso, entonces por su ser el caso resulta la conclusión»), ni pasajes que aluden a la necesidad condicional que relaciona a los principios asumidos con los teoremas derivados (e.g.: en la *Etica Eudemia* II 6, 1222b23-41, describe en estos términos la correlación entre los principios matemáticos y sus conclusiones pues «en este dominio, si el principio cambia, cambiarán prácticamente todas las conclusiones; pero no cambiarán por sí mismas, destruidas unas por otras, a no ser que se destruya la hipótesis y se proceda con ello a una demostración»). En suma, la demarcación de los principios, generales o específicos, y la autonomía deductiva que presenta un cuerpo finito de conocimiento demostrado pueden considerarse primicias del punto de vista axiomático. Pero la peculiar horma silogística de la ciencia demostrativa aristotélica, el sesgo filosófico o especulativo que presidió la transmisión y la repercusión histórica de los *Analíticos*, y el ulterior ensimismamiento del *Collegium Logicum* que dejó a su suerte las posibles demandas lógicas y metodológicas de la ciencia moderna, fueron factores que no contribuyeron a que estas primicias fructificaran en una práctica o en un método axiomáticos reales y efectivos, sino más bien a todo lo contrario.

5.4

¿Qué motivos mueven a Aristóteles a proponer esas primicias de «axiomatización»? ¿Cuál es el sentido de la teoría canónica de la ciencia demostrativa que preconizan los *Analíticos*?

No se adelanta mucho con insistir en su carácter programático, significado que por lo demás está ampliamente reconocido tanto en la dimensión intrínseca y objetiva que podía tener para Aristóteles,

como en la dimensión regulativa y puramente ideal que las metodologías programáticas tienen para nosotros.

En todo caso, este programa no es una estrategia relativa al estado de la investigación en aquel tiempo, una respuesta a ciertas demandas de origen —en especial— matemático. En las sugerencias pre-axiomáticas de Platón se adivina un esfuerzo apolíneo por iluminar las cosas, la idea de introducir el orden debido mediante la distinción, la división y el ascenso dialéctico, se trata de poner las cosas en su sitio y hacer justicia a nuestros conocimientos. En este sentido, Platón se muestra bastante sensible a la investigación matemática del momento. Pero Aristóteles no lo parece tanto —a no ser que contribuciones como la de Eudoxo le hicieran concebir falsas expectativas acerca de un saber logrado. En el programa «axiomático» de Aristóteles son ya las cosas mismas la fuente de la luz (la inteligencia está frente a las cosas que son de suyo más claras como los ojos de los murciélagos ante la luz del día, *Metaphys.* α 1, 993b9-11). Por eso una de las tareas del conocimiento probado es habituar la vista al reconocimiento de las pruebas. Ahora la misión de la exposición racional, ordenada y demostrativa, del conocimiento, el hacer saber, no consiste en poner las cosas en su sitio —ellas mismas son lo que deben ser y están donde procede— sino en declarar su índole y su lugar, y en hacer ver o mostrar que tales atributos —así como los que se deriven de ellos— no son otros que los atributos propios y adecuados del género de cosas en cuestión.

Con estos antecedentes ya podemos descartar una interpretación posible de la propuesta aristotélica de «axiomatización» de un cuerpo de conocimiento. Su sentido no estriba en representar un plan de investigación. Como habíamos visto al considerar su dimensión epistemológica, la concepción silogística de la demostración no excluye en ciertos casos una proyección heurística: la búsqueda de términos medios. Pero esta posibilidad queda coartada en el desarrollo metódico de una ciencia demostrativa que parte de la posesión cabal de sus principios inmediatos. Por otra parte, la «axiomatización» aristotélica tampoco se corresponde con un método de elucidación crítica y conceptual de doctrinas o de supuestos doctrinales; y, de hecho, el proceder dialéctico o heurístico que sigue Aristóteles en su propio trabajo dentro de esa línea poco tiene que ver con el programa estricto del libro I de los *Segundos Analíticos.* Su «axiomatización» no es un programa diseñado para el saber que se busca.

Una interpretación más tentadora es pensar que el sentido de la

propuesta aristotélica apunta a la clarificación, designación y disposición previas de los ingredientes axiomáticos que constituyen un campo científico conocido. Al fin y al cabo esta previsión metódica responde a uno de los motivos característicos de cualquier empresa de axiomatización: el poner en limpio las bases conceptuales y proposicionales de una teoría deductiva o, en general, de un cuerpo de conocimientos. Este motivo, por lo demás, sería congruente con la aparición de los primitivos *Elementos* matemáticos y se haría eco de algunas sugerencias platónicas más o menos expresas. No hay razón para suponer que Aristóteles hubiera de sustraerse a estas incitaciones y estímulos; por el contrario, algunas exploraciones éticas, físicas, y biológicas de Aristóteles parecen responder a un motivo semejante. Sin embargo, tal explicación por sí sola no hace plenamente justicia a ciertos rasgos peculiares de su ideal de la ciencia demostrativa. Tampoco hay indicios de que Aristóteles se asomara efectivamente a una perspectiva general de la axiomatización como la supuesta por una consideración premeditada de los componentes conceptuales y proposicionales de una teoría y por el análisis directo de su estructura deductiva; aunque a veces recuerda que los matemáticos tienden a reducir al mínimo sus principios necesarios (e.g. *De Coelo*, 302b26-30) y reconoce que es mejor la demostración que depende de las menos premisas posibles (*APo.* I 25, 86a33-35), ya sabemos que en otros momentos declara paladinamente que el número de los *arkhaí* de las ciencias demostrativas no resultará muy inferior al número de sus conclusiones (*APo.* I 32, 88b4-5). En realidad, Aristóteles no parece muy interesado en prescribir unos tipos de asunciones preliminares en orden a la construcción de teorías o sistemas propiamente axiomáticos. Da más bien la impresión de contentarse con elucidar y manifestar qué es lo que se debe hacer en orden a la prueba científica de un teorema o con vistas a la explicación cumplida de algo.

Lo que Aristóteles propone es sustancialmente la exposición fundamentada y didáctica de un cuerpo de conocimientos: de lo que ya se sabe o puede saberse a ciencia cierta sobre un dominio determinado de la realidad y, en definitiva, de lo que puede hacerse saber a otros al respecto. Esta exposición envuelve la organización deductiva del conocimiento; ha de estar además bien fundada y ser convincente; y, por añadidura, tiene que ser capaz de normalizar la disciplina en cuestión [23].

[23] Esta capacidad llega hasta el punto de delimitar la forma posible de su desa-

En todo caso, el motivo principal del programa aristotélico reside, a mi juicio, no en estipular las condiciones que han de presidir la constitución axiomática de una ciencia o la formación de teorías, sino más bien en declarar **qué es lo que hay que conocer o asumir en orden a entender una demostración y reconocerla como tal.**

Así pues, no es la presunta estructura de una teoría deductiva o, aquí, de una ciencia demostrativa la que conforma la idea de demostración, sino que es **la idea misma de demostración científica** la que determina esa estructura cerrada de la exposición de una disciplina. Es la idea de demostración concluyente, la idea de silogismo$_1$, la que está latiendo en los atributos de verdad, necesidad, prioridad y adecuación explicativa, que Aristóteles asigna a las premisas próximas de una prueba y a las premisas últimas —o primeras— de una ciencia demostrativa. Es análogamente la concepción aristotélica técnica de la prueba silogística, la idea sistemática del silogismo$_2$, la que viene de hecho a justificar algunas condiciones estructurales de la ciencia demostrativa como la condición de autonomía y homogeneidad, asociada al nexo silogístico de pertinencia; o la condición de finitud, asociada a unas cadenas silogísticas finitas que excluyen la densidad de la serie de los términos de mediación y remiten a conexiones inmediatas y primeras. No quiero decir con esto que casi bastaría conocer la silogística de los *Primeros Analíticos* para prever o inferir la metodología «axiomática» de los *Segundos* —como alguna vez se ha sugerido [24]—. Pero sí quiero resaltar dos implicaciones obvias: por un lado, la compenetración de esta idea de ciencia demostrativa con su lógica subyacente y, por otro lado, un rasgo distintivo del programa aristotélico dentro de la tradición axiomática en general:

---

rrollo: no consistirá en un crecimiento a través de los términos medios, hacia nuevos principios, sino en el avance de proposiciones adicionales bajo la forma de un descenso lineal o de un descenso lateral desde lo ya establecido (*APo.* I 12, 78a14-21), y siempre dentro de unos límites finitos. Aunque Aristóteles sugiere a veces —e.g. al dar cuenta del desarrollo de la retórica al final de *S. E.*, 183b16 ss.— otra especie de progresión, un crecimiento paulatino por sucesivos añadidos, esta progresión dentro de unos ámbitos esencialmente clausurados y finitos no es precisamente lo que los modernos considerarán un verdadero progreso del conocimiento.

[24] E.g. J. Hintikka (1972): «On the ingredients of an Aristotelian science», l.c., p. 55. Cf. las observaciones críticas de S. Frede: «Comment on Hintikka's paper "On the ingredients..."», *Synthese*, 28 1 (1974), pp. 79-79 (80-82 en especial), y la réplica algo destemplada de Hintikka, ibd., pp. 91-96. En M. Ferejohn (1982): «Definitions and the two stages of Aristotelian demonstration», art. c., también hay indicaciones de interés a este respecto.

la «axiomatización» de cuerpos de conocimiento que envuelve ese programa parece el desarrollo de una idea primordial de demostración en vez de ser esta idea una especie de corolario derivado. En los *Analíticos*, la idea de demostración no es una resultante de un método axiomático, por contraste con el punto de vista al que nos hemos acostumbrado desde el cambio de rumbo que introdujo el programa racionalista del «more (ordine) geométrico» del s. XVII. A partir de entonces, tanto en la axiomática informal **clásica** como en la axiomática formal **moderna**, el concepto de demostración suele tener un carácter funcional y su forma precisa depende de la estructura que el tipo de axiomatización adoptado impone a las teorías deductivas. Recordemos, por ejemplo, el concepto de demostración que utiliza Leibniz, para quien una demostración es una prueba hilada por una sucesión de definiciones, o el uso que hoy suele tener «proof» en el contexto de la «proof-theory» donde cobra el sentido de una derivación formal que a su vez codifica (o al menos, eso se supone) una prueba deductiva dentro de una teoría formalizada; en ambos casos, la demostración es una operación determinada por el método de axiomatización a seguir en la formación o en la reconstrucción de la teoría deductiva objeto de análisis. Nada de esto cabe pensar a propósito de la *apódeixis* aristotélica ni a propósito de la consiguiente exposición racional de una ciencia demostrativa.

En resumen, el sentido programático de la teoría «axiomática» de Aristóteles tiene que ver con la preocupación por la exposición racional, normalizada, del conocimiento. Pero no obedece tanto a las vías entonces abiertas de investigación, ni al análisis descriptivo o la reconstrucción normativa de los cuerpos de conocimiento disponibles o en ciernes (motivaciones habituales en los programas metodológicos de las modernas filosofías de la ciencia), como a una proyección —y a una extrapolación— de su propia invención del silogismo concluyente y, en definitiva, de la idea misma de demostración.

5.5

Se atribye a A. N. Whitehead la célebre frase de que la historia del pensamiento occidental es una serie de notas a pie de página a los diálogos de Platón. En lo que concierne a las ideas tradicionales de demostración y de axiomatización se ha difundido una aprecia-

ción parecida de los *Analíticos* de Aristóteles. La autoridad que pronto revistieron y una insistencia de siglos en su lectura, cita, versión y comentario, pueden dar la impresión de que el desarrollo clásico de esas ideas no es sino una perseverante glosa del programa aristotélico: cuando menos han dado pábulo a varios tópicos acerca del presunto influjo que la teoría aristotélica de la ciencia ha venido ejerciendo hasta casi nuestros días sobre el ideal axiomático de la ciencia deductiva o incluso sobre la investigación científica misma [25]. Me temo que estas presunciones adolecen de una miopía y de una insensibilidad históricas que nada tienen que ver con la excusable piedad platónica de Whitehead.

Desde luego, el análisis aristotélico constituye una contribución fundacional decisiva a las ideas de demostración y de método deductivo, y al punto de vista axiomático. Declara el contenido nuclear de la primera: el ser una deducción lógicamente concluyente que, sobre la base de unas premisas verdaderas, da razón de que algo sea el caso y no pueda darse de otra manera. Descubre asimismo la raíz metódica de una organización deductiva, «axiomática» de un cuerpo de conocimientos: la formación de un conjunto A de proposiciones tal que (i) hay un subconjunto de A compuesto por un número finito de tesis designadas primeras e indemostrables, (ii) cualquier otra tesis de A es demostrable a partir de ellas. Pero también es cierto que, contemplada en una perspectiva histórica, la teoría de la demostración silogística y de la ciencia demostrativa de Aristóteles nunca descendió del limbo de los justos: en su calidad de programa, sirvió ante todo para calentar la cabeza de los filósofos *methodologically minded* al tiempo que inspiraba ciertos ideales de explicación racional; pero no llegó a encarnarse en la práctica matemática y científica. Representó una especie de modelo teórico al margen de —cuando no en conflicto con— el legado práctico constituido por el paradigma de los *Elementos* de Euclides. Más adelante, al ocupar-

---

[25] Vid. A. Joja, en sus observaciones a una comunicación de R. McKeon: «Discourse, demonstration, verification, justification» (Entretiens de l'Institut Intern. de Philosophie, Liège, 1967), en *Démonstration, vérification, justification*, n.º monog. de *Logique et Analyse*, 41-42 (1968), pp. 64-5 passim; E. W. Beth (1959): *The Foundations of Mathematics*, o.c. p. 36; A. Dumitriu (1975, 1977): *History of Logic*, edic. c., vol. I, pp. 141, 189. Pero donde esos tópicos aún están más extendidos es, desde luego, en algunos medios «neoescolásticos» que se han acostumbrado a tomar el nombre de Aristóteles en vano.

nos de la demostración euclídea, tendremos ocasión de observar las diferencias que separan a uno de otro. Ahora, con el fin de ir despejando equívocos, dejaré constancia de la falsedad de algunas afirmaciones sobre el significado histórico del programa de Aristóteles.

Empezaré por tres conocidas tesis del trabajo clásico de H. Scholz (1930): «Die Axiomatik der Alten», edic. c. (1975), pp. 50-64. Son las siguientes:
1ª/ En las matemáticas de los pitagóricos y de Eudoxo, los griegos crearon el primer ejemplo de una ciencia exacta en sentido moderno, i.e. de una ciencia que estudia axiomáticamente sus elementos. 2ª/ Los griegos también produjeron la primera descripción general del tal ciencia; el autor de esta descripción fue Aristóteles. 3ª/ Tan bien hizo Aristóteles su trabajo que se prodría decir que la antigüedad, después de él, no añadió nada nuevo. Cabe pensar entonces que la teoría aristotélica representa *la* concepción griega de la demostración, sin más, al igual que constituye *la* concepción griega de la axiomatización.

La primera tesis carece de fundamento en la documentación disponible: el primer ejemplo de ciencia que, por lo que sabemos, estudia «axiomáticamente» sus elementos —el entrecomillado es imprescindible si se tiene en mente como Scholz, una concepción moderna de este método—, no es sino el suministrado por el tratado de Euclides (vid. infra, c. 4 § 1.1 en especial). La segunda tesis es falsa: la teoría de Aristóteles mal podía describir una disciplina inexistente y, de hecho, ni siquiera abrigaba pretensiones «descriptivas» (metacientíficas) en el sentido que hoy daríamos a este calificativo. La tercera tesis es injusta y no sólo con Euclides: no solamente descuida las peculiaridades, o «novedades» con respecto al silogismo canónico, de la deducción practicada en los *Elementos* y el papel paradigmático que ésta desempeña en la conformación posterior de la idea clásica de axiomatización; también pasa por alto la contribución estoica a la idea de argumentación demostrativa que el helenismo transmite a la posteridad. En la idea general de la demostración como prueba verdadera y concluyente, legada por el helenismo, parecen confluir y a veces fundirse el silogismo aristotélico y el silogismo estoico a pesar de las querellas de escuela entre estoicos y peripatéticos. Es sintomático que la crítica escéptica de la demostración tome como punto de mira el blanco estoico antes que el aristotélico. También es revelador el hecho de que en la *Iniciación a la dialéctica* (s. II) atribuida a Galeno, que pasa por ser el primer

texto de enseñanza de lógica con que nos encontramos, desemboquen y busquen una convivencia pacífica ambas tradiciones (por lo menos, el texto reconoce tres tipos de silogismo demostrativo: el categórico, de cuño aristotélico; el constituido por proposiciones hipotéticas, de marchamo estoico; y el que procede conforme a unas ideas de relación fundadas en axiomas, de raíz matemática principalmente). Para colmo, la transmisión latina de este legado helénico acentúa en ocasiones la mezcla y la confusión de ciertos elementos de la lógica aristotélica y de la dialéctica estoica.

Sigamos con un supuesto harto difundido, a pesar de las reservas que periódicamente ha suscitado. Por atribuirlo asimismo a una autoridad, lo recojo en una versión reciente de I. M. Bocheński: el único caso conocido de aplicación de las antiguas lógicas a algún campo de conocimiento es «la aplicación de la teoría aristotélica de la deducción por parte de Euclides» (vid. «The general sense and character of modern logic», en E. Agassi, ed.: *Modern Logic. A Survey*. Dordrecht/Boston, 1981; pág. 11). La verdad es que, al margen del aire de familia que pueda existir entre una primicia teórica y una primicia práctica —un tanto dispar— de la organización «axiomática» de un cuerpo deductivo de proposiciones, nada recuerda en una prueba euclídea a un silogismo aristotélico. Por lo demás, tanto el propio Aristóteles como los más lúcidos comentadores de los *Analíticos* cayeron en la cuenta de la dificultad de convalidar unas pruebas geométricas elementales por la vía canónica de los silogismos y, en fin, una pauta de deducción tan fundamental en la matemática griega como la reducción al absurdo se ve positivamente excluida del sistema al igual que otras variantes de la deducción a partir de hipótesis —e incluso de la demostración a partir de axiomas (podrían añadir Posidonio y Galeno, que saben apreciar la importancia de este tipo de demostración matemática)—.

A la luz de todas estas consideraciones es difícil aceptar una afirmación como la aventurada por E. W. Beth (1950-51): «La teoría de la ciencia de Aristóteles ha dirigido hasta hace muy poco la investigación científica» (en «Critical epochs in the development of the theory of science», l.c., p. 32), dentro de un contexto dedicado expresamente a glosar el «influjo perenne» de la teoría aristotélica de la ciencia —contexto y aserción que el mismo autor reitera de modo impenitente en *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1959; I 2, § 16, p. 36—. Por cierto, tampoco es fácil entender qué es lo que se quiere decir cuando se habla del «influjo perenne» de la teoría

aristotélica de la ciencia, a menos que se trate de reafirmar la contribución fundacional de los *Analíticos* a las ideas básicas de demostración y de «axiomatización» [26].

Recordaré por último otro error obstinado que guarda relación con los anteriores, en especial con la confusión entre el modelo programático de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* de Aristóteles y el paradigma real de la demostración geométrica de los *Elementos* de Euclides. Es el expresado por A. Dumitriu (1975, 1977): *History of Logic,* o.c., cuando concluye que la teoría de la ciencia, conforme a su formulación aristotélica, fue el modelo de toda axiomatización hasta el final del último siglo (I §8.3, p. 189). Lo cierto es, sin embargo, que los modelos de axiomatización y de prueba contemplados en los ss. XVII-XIX, en el marco de la axiomatización **clásica,** encuentran su raíz o fuente de inspiración en la demostración geométrica y no en el programa de los *Analíticos.* Naturalmente ello no quiere decir que esta axiomatización clásica, que empiezan a diseñar autores como Leibniz o Pascal, sea completamente ajena a una «axiomatización» aristotélica. Ya he repetido que se puede ver aquí una primicia del punto de vista axiomático y, en tal medida, cabe reconocer que alguna relación guarda este programa con el método clásico por más que lo separen de éste ciertos rasgos lógicos (e.g.: la silogística), epistemológicos (el carácter no innato de los primeros principios) y metodológicos (la finitud de la ciencia demostrativa), peculiares de la «axiomatización» aristotélica. Pero, en todo caso, conviene imitar la prudencia del plural con que el propio Leibniz da testimonio de su deuda con el legado heleno: «Es preciso reconocer que los griegos han razonado con enorme precisión en matemáticas y han legado al género humano los modelos del arte de demostrar» (*Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano,* 1. IV, c. II, 12*). Por ejemplo: un modelo heurístico más o menos relacionado con el llamado «método de análisis y síntesis»; un paradigma real y efecti-

[26] En realidad, las ideas de un método perenne y de una *scientia aeterna* provienen del primer sueño de una especie de ciencia unificada, alentado por algunos compiladores y tratadistas del s. II sobre la base de la normalización que algunas disciplinas ya habían alcanzado en algunos centros helenísticos —y tal vez favorecido por la relativa uniformidad institucional y cultural del imperio romano (vid. L. Edelstein (1952): «Recent trends in the interpretation of ancient science», l.c., p. 602). Desde el punto de vista histórico esas ideas apenas tienen otra significación que de pergeñar un programa especulativo —nacido en una época y unas circunstancias determinadas— y la de representar con el curso del tiempo una ideología escolástica recidiva.

vo, los *Elementos* de Euclides; un modelo filosófico o programático, los *Segundos Analíticos.*

Por otra parte, es bueno recordar algo que vale no sólo para el legado aristotélico sino, en general, para el legado helénico, a saber: las ideas, por muy buenas que sean, no hacen su propia historia, sino que han de correr el albur de muy diversos contextos de transmisión, recepción y reconocimiento. Baste pensar, por ejemplo, en que la recuperación medieval de una actitud racionalista ante el mundo —que, según algunos, permite hablar de «la revolución intelectual del s. XII» [27]— toma su inspiración de la cosmología platónica del *Timeo* antes que del ideal analítico de Aristóteles. Y si el creciente conocimiento de la lógica y la metodología aristotélicas a lo largo del s. XII contribuye al reencuentro con la idea de explicación racional a partir de unos principios, este ideal demostrativo apenas es comprendido hasta el siglo XIII y aun entonces sólo puede asumirse de modo un tanto equívoco y a medias. Como es bien sabido, los textos aristotélicos se recibieron envueltos en (y en algunos casos precedidos por) un contexto heterogéneo de glosas y comentarios —helenísticos, latinos, árabes—, al que los autores escolásticos fueron añadiendo otros de propia cosecha. En realidad, el «aristotelismo» de los ss. XII y XIII se difunde entremezclado con otros motivos de distinta procedencia (e.g.: platónica o neoplatónica, agustiniana, averroísta, avicenista). No debe extrañar entonces que muchas investigaciones medievales analíticas —e.g.: el estudio de las propiedades semánticas de los términos como la *suppositio*—, o empíricas —e.g.: estudios sobre la refracción de la luz y sobre la formación del arco iris—, desarrollaran unas señas de identidad no sólo complejas sino relativamente autóctonas. Lo cierto, en todo caso, es que no hay un único aristotelismo medieval, sino varios y diversos aristotelismos que se entremezclan con otras ideas en una solución más o menos ecléctica y al margen de que haya conciencia o no de esos influjos y compromisos [28]. También es verdad que ni siquiera más adelante, cuando surge el fervor por recuperar al Aristóteles *genuino* en algu-

[27] Vid. por ejemplo T. Stiefel: *The Intelectual Revolution in Twelfth Century Europe,* London/Sidney, 1985.

[28] Hay abundante información al respecto en N. Kretzmann, A. Kenny y J. Pinborg, eds.: *The Cambridge History of Late Medieval Philosophy,* Cambridge University Press, 1982, 1984 reimp. Desde luego, cabe pensar algo parecido del «aristotelismo» purista del Renacimiento. Vid. C. B. Schmitt: *Aristotle and the Renaissance,* Cambridge (Mass.)/London, 1983.

nos medios universitarios como la escuela de medicina de Padua, el «aristotelismo» viene a ser en la cruda realidad histórica todo Aristóteles o Aristóteles solo. Por lo demás, tal parece ser la suerte algo paradójica pero común de toda cabeza de un «ismo» en la historia del pensamiento: la de ser el objeto a la vez de las supresiones, adiciones, podas y adherencias oportunas que hacen del viejo personaje un «fundador genuino» y lo van preservando en esta calidad aunque cambien los tiempos y el sentido de esa cada vez más lejana fundación.

¿En qué se cifró entonces la herencia medieval de la teoría aristotélica de la demostración científica? Por un lado, propició el análisis lógico así como la elucidación y el debate epistemológico en torno a los conceptos de demostración, explicación y conocimiento científico. Es obvia la preocupación escolástica por la estructura lógica de las pruebas deductivas —se trasluce aun en los comentarios de los ss. XIV y XV que acompañan a ciertos tratados de Euclides o de Arquímedes—, como lo es igualmente su discusión de cuestiones espistemológicas suscitadas por las relaciones entre la demostración y la explicación, la necesidad lógica y las conexiones causales, o por el debatido estatuto de las llamadas *«scientiae mediae»* —disciplinas que aplican unos principios matemáticos al estudio de la naturaleza—. Por otro lado, en algunos medios escolásticos, la invocación de los *Analíticos* sirvió de cobertura o incluso de título de crédito para diversas empresas de investigación y de prueba. En este sentido, la teoría aristotélica parecía el espejo capaz de devolver al discurso filosófico y científico la imagen de un saber demostrado o de una explicación cumplida. Pero, en definitiva, la teoría no dio lugar por sí misma a ninguna aplicación metódica y sustantiva propiamente dicha.

Así pues, el legado heleno de la idea de demostración constituye una herencia más compleja y multiforme que la amparada en la autoridad de los *Analíticos*. Además de este programa filosófico, envuelve una práctica de la prueba y de la organización deductivas, el proceder geométrico, que al cabo de algún tiempo —en los ss. XVI y XVII— terminará por ser efectivamente identificado y reconocido. Pero ya en su mismo núcleo conceptual, en su condición misma de argumento demostrativo que hace saber, la idea de demostración se transmite a la posteridad de manos helenísticas dentro de un contexto que no responde única y exclusivamente a su raíz aristotélica sino que —entre otras cosas— trae entreverados ciertos motivos lógicos (dialécticos) y epistemológicos de clara estirpe estoica que, por lo regular, han pasado casi inadvertidos.

REFERENCIAS BILIOGRAFICAS

A

Aristotelis Opera. 5 vols. Edit. I. Bekker, O. Gigon, Berlin, 1831-1970.
The Complete Works of Aristotle. Ed. de J. Barnes. 2 vols. Princeton, 1984.
Aristotelis Analytica Priora et Posteriora. Ed. de W. D. Ross. Oxford, 1964.
Aristotle's Posterior Analytics. Versión anotada de J. Barnes, Oxford, 1975.
Metafísica de Aristóteles. Edic. trilingüe (griego, latín, español) de V. García Yebra. Madrid, 1970, 1982, 2.ª edic. rev.
Aristóteles: *Tratados de Lógica (Organon).* Introd. y versión de M. Candel. Vol. I, Madrid, 1982; vol. II, Madrid, 1988.
Aristóteles: ΠΕΡΙ ΕΡΜΗΝΕΙΑΣ. *De interpretatione.* Introd. y versión de A. García Suárez y J. Velarde. Valencia, 1978.
Aristóteles: *Retórica.* Edic. de A Tovar. Madrid, 1953, 1971 reimpr. correg.
Aristóteles: *Ética Nicomáquea. Ética Eudemia.* Introd. de E. Lledó. Madrid, 1985.

B

Barnes, J., Schofield, M., Sorabji, R., eds.: *Articles on Aristotle. 1. Science. London, 1975; 3. Metaphysics.* London, 1979.
Berti, E., ed.: *Aristotle on Science. The «Posterior Analytics».* Padova, 1981.

Düring, I.: *Aristoteles. Darstellung und Interpretation seines Denkens.* Heidelberg, 1966.
Düring, I. Owen, G. E. L., eds.: *Aristotle and Plato in the mid-Fourth Century.* Göteborg, 1960.
Graeser, A. (ed.): *Mathematics and Metaphysics in Aristotle.* Berna/ Stuttgart. 1987.
Mansion, S. ed.: *Aristote et les problèmes de méthode.* Louvain, 1961, 1980 [2].
Matthen, M., ed.: *Aristotle Today. Essays on Aristotle's Ideal of Science.* Edmonton (Alberta, Canada), 1987.
On Aristotle's Philosophy of Science. Synthese [monograf.], 28 1 (1974).
Owen, G. E. L. ed.: *Aristotle on Dialectic.* Oxford, 1968.

C.

Allan, D. J.: «Causality ancient and modern», *Proceedings of the Aristotelian Society,* Suppl. vol. 39 (1965), pp. 1-18.
Aubenque, p. (1961): «Sur la notion aristotélicienne d'aporie», en S. Mansion, ed., o.c., pp 3-19.
Aubenque, P. (1962): *El problema del ser en Aristóteles,* Madrid, 1981.
Barnes, J. (1969): «Aristotle's theory of demonstration», en Barnes, J. Schofield, M., Sorabji, R. eds., o.c., pp. 65-87.
Barnes, J.: «Aristotle, Menaechmus and the circular proof», *Classical Quarterly,* 26 (1976), pp. 278-292.
Barnes, J.: «Proof and the syllogism», en Berti, E., ed. (1981), o.c. pp. 17-59.
Beth, E. W.: «Critical epochs in the development of the theory of science», *British Journal of the Philosophy of Science,* 1 (1950-51), pp. 27-41.
Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics.* Amsterdam, 1959; ch. 2, §§ 11-18, pp. 31-39.
Blanché, R.: *La logique et son histoire d'Aristote à Russell.* Paris, 1970; ch. II, pp. 25-81.
Bochénski, I. M.: *Ancient Formal Logic,* Amsterdam, 1951, 1957.
Bochénski, I. M.: (1956): *Historia de la lógica formal.* Madrid, 1966; II, pp. 52-110.
Bogen, J.: «Moravcsik on explanation», *Synthese* 28 1 (1974), pp. 19-25.
Brody, B. A. «Towards an Aristotelian theory of scientific explanation», *Philosophy of Science,* 39 (1972), pp. 20-31.
J. Brunschwig: «L'Objet et la structure des *Seconds Analytiques* d'après Aristote», en E. Berti, ed. (1981), o.c., pp. 61-96.
Burnyeat, M. F.: «Aristotle on understanding knowledge», en Berti, E., ed. (1981), o.c., pp. 97-139.
Corcoran, J.: «A mathematical model of Aristotle's syllogistic», *Archiv für Geschichte der Philosopie,* 55 (1973), pp. 191-219.
Corcoran, J.: «Aristotle's natural deduction system», en Corcoran, J. ed.: *Ancient Logic and Its Modern Iterpretations.* Dordrecht/Boston, 1974; pp. 85-131.

Corcoran, J., Scanlan, M.: «The contemporary relevance of ancient logical *Intern. Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science* (Ontario, 1975), pp. 98-104.

Corcoran, J., Scanlan, M.: «The contemporary relevance of ancient logical theory» (rev. of J. Lear (1980), o.c.), *Philosophical Quarterly*, 32/126 (1982), pp. 76-86.

Dumitriu, A. (1969-1975): *History of Logic.* Tunbridge Wells (Kent), 1977; vol, I, ch. VIII, pp. 141-206.

Einarson, B.: «On certain mathematical terms in Aristotle's logic», *American Journal of Philology*, 57 (1936), pp. 33-54, 151-172.

Ferejohn, M.: «Definition and the two stages of Aristotelian demonstration», *Review of Metaphysics*, 36 (1982), pp. 375-395.

Frede, M.: «Stoic vs. Aristotelian syllogistic», *Archiv für Geschichte der Philosophy*, 56 (1974), pp. 1-32.

Fritz, K. von: «Dir APXAI in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte*, 1 (1955), pp. 13-103.

Fritz, K. von: *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin, 1971.

Gaukroger, S.: *Explanatory Structures.* Sussex, 1978; II, ch. 4, pp. 83-133.

Gotthelf, A.: «First principles in Aristotle's Parts of Animals», en A. Gotthelf y J. G. Lennox, eds.: *Philosophical Issues in Aristotle's Biology.* Cambridge, 1987; pp. 167-198.

Heath, T.L.: *Mathematics in Aristotle.* Oxford, 1949.

Hintikka, J. (1957): «Necessity, universality, and time in Aristotle», en J. Barnes, M. Shofield, R. Sorabji, eds. (1979), o.c., pp. 108-124.

Hintikka, J. (1957): «Necessity, universality, and time in Aristotle», en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. 81979), o.c., pp. 108-124.

Hintikka, J.: «On the ingredients of an Aristotelian science», *Noûs*, 6 (1972), pp. 55-69.

Hintikka, J.: *Time and necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality.* Oxford, 1973, 1975 reimp.

Hintikka, J.: «Aristotelian axiomatics and geometrical axiomatics», en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds. (1980): *Theory Change, Ancient Axiomatics...*, o.c., pp. 133-144.

Hocutt, M.: «Aristotle's four becauses», *Philosophy*, 49 (1974), pp. 385-399.

Kal, V.: *On Intuition and Discoursive Reasoning in Aristotle.* Leiden, 1988.

Kapp, E. (1931): «Syllogistik», en la Pauli-Wissowa: *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft*, IV A, cols. 1046-1067. Recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 34-49.

Kneale, W. y M. (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica.* Madrid, 1972; II, pp. 22-94. (Reedic. inglesa post. —Oxford, 1984—, ligeramente revisada).

Kosman, L. A.: «Understanding, explanation, and insight in Aristotle's *Posterior Analytics»*, en E. N. Lee, A. P. D. Mourelatos, R. M. Rorty, eds.: *Exegesis and Argument. Phoronesis,* suppl. 1 (1973), pp. 374-392.

Kullmann, W.: *Wissenschaft und Methode.* Berlin, 1974.
Landor, B.: «Definitions and hypotheses in *Posterior Analytics* 72a19-25 and 76b35-77a4», *Phronesis,* XXVI 3 (1981), pp. 308-318.
Le Blond, J. M.: *Logique et méthode chez Aristote.* Paris. 1939.
Le Blond, J. M.: «La définition chez Aristote», *Gregorianum,* 20 (1939), pp. 351-380. Recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1979), o.c., pp. 63-79.
Lear, J.: *Aristotle and Logical Theory. Cambridge, 1980.*
Lear, J.: «Aristotle's philosophy of mathematics», *The Philosophical Review,* XCI 2 (1982), pp. 161-192.
Lear, J.: *Aristotle: the desire to understand.* Cambridge, 1988.
Lee, H. D. P.: «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», *Clasiccal Quarterly,* 29 (1935), pp. 113-134.
Lennox, J. G.: «Divide and explain: the *Posterior Analytics* in practice», en A. Gotthelf y J. G. Lennox, eds. (1987), o.c., pp. 90-119.
Lesher, J. H.: «The meaning of ΝΟΥΣ in the *Posterior Analytics*», *Phronesis,* XVIII 1 (1973), pp. 44-68.
Leszl, W.: «Unity and diversity of the sciences: the methodology of the mathematical and of the physical sciences and the role of nominal definition», *Revue Internationale de Philosophie,* 133-134 (1980), pp. 384-421.
Leszl, W.: «Mathematics, axiomatization and the hypotheses», en E. Berti, ed. (1981), o.c., pp. 271-328.
Łukasiewicz, J. (1934, 1935): «Contribución a la historia de la lógica de proposiciones», versión y comentarios de L. Vega, comp.: *Lecturas de Lógica. I.* Madrid, 1981; iv, pp. 109-172. También está traducido en J. Łukasiewicz (1970): *Estudios de Lógica y Filosofía,* Madrid, 1975, pp. 87-107; J. Łukasiewicz: *Para una historia de la lógica de proposiciones,* Valencia, 1975.
Łukasiewicz, J. (1951, 1957): *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna.* Madrid, 1977.
Mansión, A.: «L'origine du syllogisme et la théorie de la science chez Aristote», en S. Mansion, ed. (1961, 1980), o.c., pp. 57-81.
Matthen, M.: «The estructure of Aristotelian Science» en Matthen, ed. (1987), o.c. pp. 1-23.
McCall, S.: *Aristotle's Modal Syllogism.* Amsterdam, 1963.
McKeon, R.: «*Aristotle's Modal Syllogism.* Amsterdam, 1963.
McKeon, R.: «Aristotle's conception of the development and the nature of scientific method», *Journal for the History of ideas,* 8 (1947), pp. 3-44.
Mignucci, M.: *L'argomentazione dimostrativa in Aristotele. (Commento agli Analitici Secondi, I).* Padova, 1975.
Mignucci, M.: «Sur la "méthode" d'Aristote en logique», *Revue Internationale de Philosophie,* 133-134 (1980), pp. 359-383.

Moravcsik, J. M. E.: «Aristotle on adequate explanation», *Synthese,* 28 1 (1974), pp. 3-17.

Mueller, I.: «Aristotle on geometrical objects», *Archiv für geschichte der Philosophie,* 52 (1970), pp. 156-171.

Mueller, I.: «Greek mathematics and Greek logic», en J. Corcoran, ed. (1974), o.c., pp. 35-70.

Mulhern, M.: «Aristotle on universality and necessity», *Logique et Analyse,* 12 (1969), pp. 288-299.

Owen, G. E. L.: «Logic and metaphysics in some earlier works of Aristotle», en I. Düring, G. E. L. Owen, eds. (1960): *Aristotle and Plato...,* o.c., pp. 163-190; recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1979), o.c., pp. 13-32. En la compilación de G. E. L. Owen (1986), pp. 180-199.

Owen, G. E. L. (1965): «The platonism of Aristotle», en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 14-34. En Owen (1986), pp. 200-20.

Owen, G. E. L. «Aristotle. (Method. Physics, and Cosmology)», en Ch. C. Gillipie, dir.: *Dictionary of Scientifics Biography,* New York, 1970; I, pp, 250-258. En Owen (1986), pp. 151-164.

Owen, G. E. L.: *Logic, Science and Dialectic. Collected Papers in Greek Philosophy.* London, 1986.

Patzig, G. (1959, 1963): *Aristotle's Theory of Syllogism.* Dordrecht, 1968.

Prior, A. N., dir, (1967): *Historia de la lógica.* Madrid, 1976; I, pp. 11-27.

Ross, D.: «The discovery of syllogism», *Philosophical Review,* 48 (1939), pp. 251-272.

Ross, D. (1957).: «The development of Aristotle's thought», en I. Düring y G. E. L. Owen, edis. (1960), o.c., pp. 1-17; también recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 1-13.

Sainati, V.: *Storia dell'Organon aristotelico.* I. Firenze, 1968.

Scholz, H. (1930): «Die Axiomatik der Alten», reimp. en *Mathesis Universalis* (edic. de H. Hermes, F. Kambartel, J. Ritter). Basel. 1969 [2], pp. 27-44. Recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c., pp. 50-64.

Smiley, T. J.: «What is a syllogism?», *Journal of Philosophical Logic,* 1 (1973), pp. 136-154.

Smith, R.: «The mathematical origins of Aristotle's syllogistic», *Archive for History of Exact Sciences,* 19 (1978), pp. 201-209.

Smith, R.: «Aristotle as a proof theorist», *Philosophia Naturalis,* 21 (1984), pp. 590-597.

Smith, R.: «Inmediate propositions and Aristotle's proof theory», *Ancient Philosophy,* 6 (1986), pp. 47-68.

Thom, P.: *The Syllogism.* München, 1981.

Van Fraassen, B. C.: «A Re-examination of Aristotle's Philosophy of Science», *Dialogue,* 19 (1980), pp. 20-45.

Vega, L.: «La historia de la lógica y el "caso Aristóteles"», *Llull*, 5 (1983), pp. 175-207.

Weil, E. (1951): «La place de la logique dans la pensée aristotélicienne»,reimp. en *Essais et conférences*. I. Paris, 1970; pp. 44-70. Recogido en J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, eds. (1975), o.c. pp. 88-112.

Capítulo 3
LA CONTRIBUCION ESTOICA

Como acabo de indicar, la teoría aristotélica de la demostración no es la única contribución lógica y metodológica de los griegos al desarrollo de esta idea. Quizás se haya tenido a veces la impresión contraria, la falsa impresión de que el programa de los *Analíticos* es todo cuanto los filósofos griegos pudieron decir en torno a la noción de *apódeixis.* Pero esta ilusión sólo ha prosperado en contados lugares y momentos.

La verdad es que ya en la misma Atenas y apenas cumplido un siglo de la muerte de Aristóteles, si se hubiera preguntado a un griego ilustrado por la noción de *apódeixis* habría respondido no en términos aristotélicos sino en términos estoicos, e igualmente habría dicho «Crisipo» antes que «Aristóteles» si se le hubiera pedido el nombre del lógico más afamado. Por otra parte, con el correr del tiempo, las glosas de los comentadores griegos y latinos de Aristóteles fueron perpetrando una creciente confusión entre los motivos lógicos aristotélicos y los motivos lógicos estoicos. En el s. II de nuestra era las contribuciones de una y otra procedencia a la lógica de la demostración componen un legado suficientemente conjuntado como para formar una base común de enseñanza de la lógica y la metodología científica, según muestra el manual de iniciación a la Dialéctica *[Eisagogé Dialektiké]* atribuido a Galeno.

Esa mezcla de conceptos y términos aristotélicos con conceptos y términos estoicos que van entretejiendo los comentadores tardíos no facilita mucho la tarea de discernir la contribución estoica. Pero éste sería un mal menor si no mediaran otras dificultades, por ejemplo: el hecho de que no dispongamos de ningún texto lógico de los escolarcas de la Stoa antigua (s. III a.n.e.) salvo unos pocos fragmentos de las *Investigaciones lógicas* de Crisipo (*Stoicorum veterum fragmenta*, II, 298a); o el hecho de que las mejores fuentes sobre la lógica estoica sean posteriores a Crisipo (muerto hacia 205 a.n.e.) en cuatrocientos años por lo menos: Comparado con todo esto resulta anecdótico el detalle adicional de que esas fuentes sean precisamente Sexto Empírico, un médico escéptico empeñado en la demolición del dogmatismo estoico; Diógenes Laercio, una especie de Isaac Asimov de la filosofía helénica, con sus puntas y ribetes de Elsa Maxwell; y una serie de críticos aristotélicos de la lógica estoica encabezados por Alejandro de Afrodisia. Con todo y con eso, la importancia y la efectividad de la contribución estoica al legado programático griego sobre la idea de demostración bien merece un esfuerzo más o menos aventurado de discernimiento.

1. *Algunas peculiaridades del estoicismo.*

El planteamiento aristotélico y el estoico coinciden naturalmente en algún rasgo esencial de la idea de demostración. La demostración es, desde ambos puntos de vista, una argumentación lógicamente concluyente; da cuenta y razón de la necesidad de que algo sea el caso; procede desde lo mejor conocido o desde lo claro y manifiesto hasta lo menos cognoscible o lo desconocido y oculto, y puede así mejorar o aumentar nuestro conocimiento. La demostración estoica también nos hace saber la verdad de algo y nos asegura que sabemos. En otras palabras, la demostración mantiene tanto su proyección lógica y discursiva como su proyección epistémica y explicativa. Las peculiaridades estoicas residen en la manera de entender estas dos dimensiones. Por lo demás, los estoicos guardan silencio sobre la «axiomatización» a la manera aristotélica —la deducción en nombre de un axioma matemático *[katà dýnamin axiómatos]* sólo representa para un estoico como Posidonio un tipo de argumento demostrativo que discurre paralelamente al silogismo aristotélico y al silogismo crisípeo, pero no dice, al parecer, relación expresa a la axiomatiza-

ción de un cuerpo de conocimientos sino más bien al contenido lógico peculiar de algunos principios matemáticos—.

Pero entre la demostración aristotélica y la estoica hay diferencias de linaje y de inclinación que saltan a la vista. El programa aristotélico guardaba cierta afinidad con el espíritu de las pruebas matemáticas que se daban en su entorno, sobre todo con la deducción directa de teoremas geométicos. La demostración preconizada en los *Segundos Analíticos* discurría por medio de relaciones de predicación subsuntivas y transitivas; los términos y las proposiciones generales tenían una importancia característica. Ese programa también venía marcado por la consideración del saber científico como *epistéme* y por la referencia a las ciencias, *epistémai*, como cuerpos de conocimiento cuya organización deductiva había de reflejar el orden de inteligibilidad de lo conocido. La concepción estoica muestra afinidades e intereses muy distintos.

1.1

En primer lugar, los estoicos enlazan con la dialéctica informal de los eleatas y de las escuelas socráticas «menores», como si la mediación platónica y —sobre todo— la lógica aristotélica apenas hubieran existido. Sabido es, por ejemplo, el cuidado que ponen en ignorar la terminología de Aristóteles aun en los casos en que ésta había acuñado según todos los visos un uso relativamente estable y técnico. Suele atribuirse considerable importancia al influjo de la llamada «escuela megárica» sobre Zenón de Cition, fundador de la Stoa hacia 300 a.n.e. Al decir de Diógenes Laercio (*Vidas*, II 106 ss.), los miembros de esa escuela fueron calificados sucesivamente de «megáricos» (Euclides de Megara, Eubúlides, Trasímaco), «erísticos» (Alexino de Elis, Stilpón), «dialécticos» (Diodoro Crono, Filón); aunque hoy quizás convendría pensar más bien en una constelación de escuelas que en distintas fases evolutivas de una misma escuela [1]. Estos personajes «menores», un tanto marginales en la perspectiva usual de la gran tradición ática, consideraron ciertas paradojas derivadas de unas declaraciones aparentemente plausibles, quizá en la

[1] Vid. D. Sedley (1977): «Diodoros Cronos and Hellenistic Philosophy», l.c.; G. Giannantoni, ed. (1985): *Socraticorum reliquiae*, o.c; III, pag. 45.

línea de la dialéctica eleática; analizaron las dificultades que acechan al ingenuo que quiere dar respuestas simples a cuestiones complejas (e.g.: la reflexividad propia de la cuestión «Cuando uno dice con verdad que miente, ¿está mintiendo o diciendo la verdad?», o la vaguedad característica de «¿Cuántos granos de arena hacen un montón?», o la presuposición envuelta en «Lo que no has perdido, todavía lo tienes; no has perdido los cuernos; de modo que aún los tienes»); y en general prestaron gran atención a las implicaciones de lo que se dice o de lo que se asume en el curso de un debate. Como indican algunos diálogos juveniles de Platón, las indagaciones de este tipo casaban perfectamente no sólo con el legado eleático —del que dependía más la escuela megárica—, sino con el otro ramal de la herencia dialéctica derivado de las confrontaciones sofísticas, los ejercicios retóricos y sobre todo el elenco socrático. En cualquier caso, Zenón de Cition mantuvo una relación estrecha con los «dialécticos»: frecuentó el trato de Diodoro Crono y discutió asiduamente con Filón, instruyéndose con ambos en las lides dialécticas (Diógenes Laercio: *Vidas*, VII 16-17, 25). Crisipo también pasará luego por un entrenamiento dialéctico intenso para afrontar el escepticismo que afloraba a mediados del s. III a.n.e. en la Academia platónica.

Pero más allá de las circunstancias que rodean a las figuras prominentes de la Stoa antigua, hay que reconocer que la argumentación filosófica y la deducción ordinaria —en ámbitos de discurso tan dispares como los de las matemáticas, la medicina o la astrología— constituyen afinidades electivas permanentes de la lógica estoica. Son los estoicos quienes otorgan carta de ciudadanía lógica a los argumentos a partir de hipótesis, al escrutinio de las consecuencias y las implicaciones de un conjunto de asertos, a las formas apagógicas de deducción y a la reducción al absurdo. Son ellos asimismo quienes centran inequívocamente el análisis lógico en el examen de las relaciones deductivas que se dan entre proposiciones cabales e indivisas —antes que entre sus componentes o términos separados, sujeto y predicado—, entre las unidades discursivas que ellos llaman *«axiómata»:* aserciones que encierran una significación completa, esencialmente determinable como verdadera o falsa. También es ilustrativo el detalle de que esta denominación de *«axíoma»* se extienda a toda aserción en general y no se acoja al uso de los matemáticos invocado por Aristóteles, sino a un uso común de su étimo *«axióo»:* «reclamar, sostener ante alguien, estimar, tener por cierto»; el «axioma» es el compromiso significativo (semántico y pragmático) que uno

asume cuando afirma, niega —o aun supone— algo, cuando enuncia una frase griega queriendo decir algo.

1.2

Por otro lado, la filosofía estoica reconoce de buen grado las *tékhnai,* los saberes útiles y prácticos, junto a las ciencias y las *epistémai* aristotélicas. Ambos géneros de saber se fundan empíricamente en la percepción y tienen una constitución sistemática: la ciencia que posee el sabio es un conocimiento racional, se distingue por su estabilidad y su solidez interna; la *tékhne* es a su vez un sistema de percepciones reunidas por la experiencia que tienden a un fin particular útil para la vida. (Entre paréntesis diré que esta noción de tékhne dio lugar a la definición medieval de método —*ars, methodus*— a través de un curioso trastrueque de términos: una expresión clave de la versión latina inicial *«perceptio»* (percepción) se trocó en *«praeceptio»* (doctrina, enseñanza, conjunto de preceptos) con lo que la idea de arte-método perdió sus raíces empiristas estoicas, cobró un aire normativo y así pudo asimilarse sin reparos a una tradición aristotélica a la que en principio había sido ajena.) La filosofía estoica también está más interesada en adquirir conocimientos sustantivos concretos mediante la determinación de las causas y condiciones particulares de lo que ocurre, que en contemplar el orden de inteligibilidad y la causa formal o final de lo conocido. Poco hay de singular en esta actitud si se tienen en cuenta los ideales empiristas y prácticos, filantrópicos y técnicos del helenismo. Sin embargo, su peculiar punto de vista sobre las relaciones entre la deducción y la explicación causal y principalmente una original inclinación «semiológica» —que luego veremos— dan al estoicismo una acusada personalidad en ese marco. Si la lógica estoica conecta inicialmente con el legado dialéctico común e informal de los ss. V y IV a.n.e., es posible que esta inclinación «semiológica» nos haga recordar a su vez otra tradición proveniente de esos mismos siglos: la tékhne médica. Una *tékhne,* en el sentido paradigmático que ya Platón reconocía a la medicina, es un conocimiento fundado en la experiencia ganada y no en la observación casual: es útil y se aplica a mejorar las condiciones de la vida humana; es, en fin, susceptible de aprendizaje y practicable como oficio. Esta vía de conocimiento había sido abierta y explorada por la medicina hipocrática, y de este mismo

concepto de técnica se nutre el helenismo. Pero quizás el legado hipocrático haya podido rendir aún mayores servicios. Veamos.

Una característica de algunos tratados del *Corpus* hipocrático consiste en oponer el conocimiento efectivo de la causas y los procesos naturales que determinan la salud o la enfermedad del cuerpo a las especulaciones y las «hipótesis» de los filósofos *[physiólogoi]*. Ese conocimiento envuelve una cooperación entre la observación directa *[aísthesis]* y el razonamiento reflexivo *[logismós]*, cuya interacción va constituyendo un fondo de experiencia clínica hasta cobrar la forma expresa de una *tékhne*, de un saber técnico. «Es toda una tarea el examen de un cuerpo. Requiere vista, oído, olfato, tacto, lengua, razonamiento» (*Epidemias*, VI 8). Un supuesto notable de esta opción empirista es proponer el conocimiento de lo invisible —de factores imperceptibles por sí mismos y estados internos del cuerpo— a partir de lo visible, a partir de los signos *[semeîa]* o señales *[tekméria]* que se manifiestan exteriormente. El conocimiento puede discurrir entonces por la vía de las analogías (e.g. *Sobre la medicina antigua*, 22) y por la vía de los síntomas que dan lugar al diagnóstico, a la identificación de casos tan valorada por los médicos de Cnido, o dan lugar al pronóstico, al seguimiento concreto del curso regular de la afección, más valorado al parecer por los médicos de Cos (vid. *Sobre la dieta*, 1-8; *El pronóstico*, 1; *Predicciones* II, 1).

No hay datos que avalen una relación directa de la Stoa antigua con esta medicina hipocrática de finales del s. V a.n.e. y principios del s. IV a.n.e. Tampoco hay constancia de que los estoicos adoptaran el supuesto afín de Anaxágoras: los fenómenos son un vislumbre de las cosas invisibles (*«ópsis adélon ta phainómena»*, 59 B 21a). Pero sí hay una curiosa coincidencia entre estos precedentes y el interés estoico por una semiología inferencial y por la dimensión cognoscitiva del signo. Una coincidencia similar reaparece entre la epistemología estoica, paradigma de la filosofía dogmática para Sexto Empírico, y la metodología de los médicos que Galeno denomina «dogmáticos (doctrinarios)»: son médicos que se declaran partidarios de la «indicación *[éndeixis]*» (i.e. del conocimiento de una afección oculta por sus signos sintomáticos) y del recurso a la dialéctica —aparte de la práctica de disecciones (Galeno: *De Sectis*, 5 1). Parejamente en los *Hóroi iatrikoí*, un tratado médico atribuido erróneamente al propio Galeno, se define el signo como un medio de discernimiento prospectivo *[diágnosis]* y, alternativamente, como aquello que al comprenderlo nos remite a otra cosa o nos da a

conocer algo que ignorábamos. Para resaltar el alcance de estas coincidencias me detendré un momento a considerar la inclinación semiológica de la epistemología estoica.

Adelanto que no son los estoicos los primeros en ofrecer un análisis «técnico» de los usos inferenciales comunes del signo *[semeîon]* como señal o indicación de alguna cosa. Si este análisis consiste sustancialmente en una reconstrucción de la relación «A es un signo de B» en un marco discursivo que entraña las condiciones: (i) A es algo manifiesto o presente de algún modo para nosotros, (ii) la realidad de B se infiere de la de A, (iii) el hecho de darse A es una prueba que abona o justifica esta inferencia, entonces podemos remitir dicho análisis a Aristóteles (*APr.* II 27, 70a6 ss.; *Retórica* I 2, 1357a22-b26; *Ibd.* II 25, 1402b13-1403a16). Según Aristóteles, un signo es un alegato de prueba, sea necesario o sea aceptado comúnmente (*APr.* II 27, 70a6-7), e.g. «está embarazada pues tiene leche en los pechos», «está embarazada pues tiene un color cetrino». Equivale a un entimema cuya fuerza probatoria depende de la validez de su remodelación silogística: el primer caso puede traducirse a un silogismo de la 1.ª figura («toda mujer que tiene leche en los pechos, está embarazada; la mujer tal o cual tiene leche en los pechos; luego, está embarazada»); el otro, en cambio, no responde sino a un esquema inválido de la 3.ª figura («toda mujer que está embarazada, tiene color cetrino, la mujer tal o cual tiene color cetrino; luego, está embarazada»). Así pues, la inferencia primera depara una implicación lógicamente válida; se hace en nombre de un tipo especial de signo *[tekmérion]* que representa una prueba concluyente. La inferencia segunda constituye a lo sumo un argumento plausible o verosímil, de un valor persuasivo similar al de los argumentos retóricos. La peculiaridad del análisis estoico del signo, con respecto a este precedente aristotélico, no es sólo lógica sino epistemológica: por un lado, recurre a un sistema propio de convalidación y a un criterio de coeliminación *([kat'anaskeuén trópos]:* A no puede darse como signo si no se da B, la cosa significada, (Filodemo: *De signis,* 1.1-9, 14.2-11); por otro lado, introduce marcas epistemológicas de distinción entre A, lo que oficia de signo, algo que está a la vista, y B, lo significado (inferencialmente), algo no observado en esa ocasión o algo de suyo inobservable.

Es posible que los estoicos no mantuvieran una teoría única del signo y puedan apreciarse variaciones entre una concepción primigenia, deudora de la formación dialéctica de Zenón, y una concep-

ción posterior, tamizada por la criba de Crisipo [2], que impone la idea de signo como garantía incontestable sobre la idea de signo como señal o indicación falible. En cualquier caso, podemos atenernos a la información que proporciona Sexto Empírico (*adversus Mathematicos* VIII, 145-55, 245-256; *Pyrrhóneioi Hypotypóseis* II 10, 97-110). A tenor de *PH* II 104, lo que entienden los estoicos —los dogmáticos— por signo *[semeîon]* es «una proposición que forma el preantecedente de un condicional correcto y revela el consecuente». El término «preantecedente *[prokathegouménon]*» es un término técnico para designar la prótasis de un condicional «si α, entonces β», cuyos miembros proposicionales, «α» y «β», son ambos verdaderos (se trata de un condicional «que no empieza con una verdad y termina con una falsedad»). La función capital del signo es la de revelar el consecuente de este condicional, la de señalar o indicar la verdad de la apódosis. Se supone que el consecuente refiere algo oculto, ignorado o no evidente en principio, que viene a ser manifestado o conocido a través de ese funcionamiento del antecedente como un signo. De ahí que un antecedente dotado de esa virtud significativa y utilizado en tal calidad constituya un signo indicativo *[endeiktikón]* o revelador *[ekkalyptikón]* del consecuente. Así formulada, la presencia de sudor puede tomarse como un síntoma de la existencia de poros en el cuerpo («si el sudor fluye a través de la piel, hay poros imperceptibles en la carne», *PH.* II 142); la existencia de leche en los pechos es señal de un embarazo (*M.* VIII 423); el movimiento corporal revela la existencia del alma corpórea (*PH.* II 101; *M.* VIII 155). En estos casos, un fenómeno perceptible o manifiesto funciona como signo de la causa imperceptible o de la condición oculta. Análogamente, nos recuerda también Sexto Empírico, la demostración viene a ser como una especie de signo «pues es reveladora de su conclusión, y la conjunción de las premisas será un signo de la vigencia de la conclusión» (*M.* VIII 277). La concepción estoica del signo envuelve ciertas ambigüedades: la «significación *[semeîosis]*» puede denotar una asociación inferencial genérica o una asociación

[2] Sobre la concepción estoica del signo pueden verse G. Verbeke: «La philosophie du signe chez les stoiciens», en J. Brunschwig, ed. (1978), o.c., pp. 401-424; M. Burnyeat: «The origins of non-deductive inference», en J. Barnes y otros (1982), o.c., pp. 193-238; D. Sedley: «On signs», ibd., pp. 239-272. Para la distinción entre una concepción primitiva, inspirada en los «dialécticos», y la concepción posterior de cuño crisípeo, vid. T. Ebert: «The origin of the Stoic theory of signs in Sextus Empiricus», en *Oxford Studies in Ancient Philosophy,* V (1987), pp. 83-126.

específicamente causal entre el signo expreso y la condición oculta; por otra parte, esta asociación resulta a veces meramente empírica o más en general falible (e.g. en el caso del llamado signo «común *[koinón]*»), mientras que otras veces tiene el carácter lógico y conceptual de una conexión analítica o necesaria (en el caso del llamado signo «propio *[ídion]*»); y, en fin, la transferencia semiológica puede descansar en la conexión discursiva de una inferencia condicional plausible (e.g., sobre la base de una relación de semejanza) o en el nexo de implicación que guardan las premisas con la conclusión de un argumento demostrativo. Más adelante consideraré las relaciones no siempre claras ni armoniosas entre la inclinación empirista y la inclinación inferencial de la teoría estoica del conocimiento, así como la repercusión que ésta segunda tiene en la concepción estoica de la demostración. Pero, de momento, lo que interesaba era resaltar el sesgo semiológico peculiar del estoicismo y creo que lo dicho puede ser suficiente a este respecto.

1.3

Si se quiere hallar una raíz más honda de la idiosincrasia estoica, bueno será buscarla en su concepto de *Lógos.* La lógica estoica, «*Dialektiké*», es la ciencia del discurso racional; forma parte sustancial del conocimiento filosófico, en compañía de la física y la ética. Las tres son dimensiones específicas pero indisolubles de un mismo lógos: conforman uno y el mismo lógos la racionalidad lógica que vincula antecedentes y consecuentes, la racionalidad física que establece conexiones causales, la racionalidad ética que rige la armonía y la coherencia de nuestras acciones.

La asunción de que el mundo constituye una trama ordenada y racional tiene una larga tradición en el pensamiento griego; por decirlo en los términos de una popular distinción de Ortega y Gasset entre las ideas que uno tiene y las creencias en las que se está, ésa no fue una idea que los griegos tuvieran o se hicieran desde el s. V a.n.e. sino más bien una creencia en la que se mantuvieron. El rasgo distintivo del pensamiento estoico es el énfasis que pone en la unidad y en la inmanencia del lógos que han de manifestarse a la par en el discurso verdadero, en el determinismo natural, en la sabiduría del bien vivir conforme a la verdad y la naturaleza. La fuente de esta concepción del lógos vuelve a encontrarse más allá de la gran

filosofía ática de Platón y de Aristóteles; dimana seguramente de Heráclito. En todo caso, no se puede esperar de la dialéctica estoica una lógica **formal** en el sentido que hoy debe tener esta disciplina. Aunque la precisión lógica y las luces semánticas de los estoicos resulten por lo regular superiores a las mostradas por el propio Aristóteles (lo cual les valió en tiempos una mal ganada fama de formalistas o de analistas hueros), la verdad es que las relaciones entre la implicación o la consecuencia lógica y la conexión causal o natural suelen ser para ellos más estrechas de lo que hoy estaríamos dispuestos a reconocer. Crisipo ya se vio acusado por su sombra escéptica, Carnéades, de no distinguir suficientemente entre los nexos proposicionales y los nexos causales, entre la necesidad lógica y la necesidad física. Pero ambas son presencias correlativas de un Lógos común y universal, del mismo modo que la verdad es el correlato de la realidad. Como glosaría más tarde Stobaeo (*Stoicorum Veterum Fragmenta,* II 913): «verdad», «causa», «naturaleza», «necesidad» y «lógos» son todos ellos términos que denotan aspectos diversos y solidarios de una misma sustancia, el universo racional.

Con estos antecedentes podemos pasar a plantearnos el concepto estoico de demostración, su noción de *apódeixis* o de *lógos apodeiktikós* —no siempre está claro el sentido de esta doble denominación—.

2. *La idea estoica de demostración.*

Creo que estamos autorizados a hablar de una concepción estoica de la demostración —o de **la** idea estoica de argumento demostrativo—, aunque luego podemos distinguir algunas variaciones en su conceptualización o al menos en su transmisión a través de las fuentes ordinarias, en especial Sexto Empírico.

Si los escritos originales de Crisipo se perdieron relativamente pronto, y en la época de los comentadores tardíos como Simplicio (s. VI) apenas quedaba rastro de ellos, abundaban en cambio —ya desde el s. II, como testigua Aulo Gellio (*Noct. Atticae*, XVI 8, 1-4)— los textos o manuales, *Eisagogaí Dialektikaí,* que exponían la lógica estoica. Estos y otros indicios nos permiten reconocer una concepción básica uniforme de la demostración procedente seguramente de la Stoa antigua. Esta idea de demostración comprende el núcleo característico siguiente: la *apódeixis* o el *lógos apodeiktikós* es una argumentación; es asimismo lógicamente concluyente; y depara una

conclusión que no era manifiesta antes de realizarse la demostración o no se hace patente como no sea por medio de una demostración (cf. Sexto Empírico: *M.* VIII 303-309; *PH.* II 135, 140; Diógenes Laercio: *Vitae,* VII 45; Cicerón: *Acad.* II 26). Esta idea se ve sujeta a ciertas precisiones y aclaraciones, alguna de ellas tan sustancial que pasa a formar parte del concepto digamos «oficial» de demostración; pienso, por ejemplo, en la precisión de que el argumento demostrativo es efectivamente verdadero —amén de lógicamente válido o concluyente—, y en la aclaración de que las premisas revelan o muestran de algún modo la verdad de la conclusión. De hecho la mayoría de los intérpretes actuales, por debajo de las discrepancias hermenéuticas más o menos acusadas que puedan subsistir entre ellos, coinciden en atribuir a Crisipo y a la tradición genuinamente estoica una idea de demostración formada por todos estos rasgos: una demostración es (i) una argumentación; (ii) concluyente o deductivamente válida (iii) verdadera; (iv) «demostrativa» o reveladora de una conclusión no patente; y (v) esta virtud reveladora descansa en una relación de pertinencia que las premisas guardan con la conclusión [3].

Una muestra paradigmática podría ser la siguiente: «Si el sudor fluye a través de la piel, hay poros invisibles en la carne; pero efectivamente el sudor fluye a través de la piel; luego, hay poros invisibles o imperceptibles en la carne» (Sexto Empírico: *M.*, VIII 309; *PH.*, II 142). La validez de esta deducción salta a la vista pues se trata de una aplicación obvia de la pauta *Modus Ponens* (si α entonces β; α; luego, β). También podemos asumir la verdad de las premisas; la primera descansa en una relación conceptual que presuponemos entre el flujo de un líquido a través de un cuerpo sólido y la porosidad, no cabría este flujo exterior en un cuerpo compacto y no poroso; la segunda premisa es la constatación de que se produce el fenómeno del flujo. Y, en fin, este hecho es revelador de la existencia real de poros que no son perceptibles —salvo por la inteligencia, *noetaí*—: el fenómeno observado nos da a conocer, a la luz de las nociones avanzadas en la primera premisa («*dià tò proeilêphthai*» *PH.* II 142), una condición o causa —una explicación concreta—

[3] Cf. B. Mates (1961 [2]): *Lógica de los estoicos,* edic. c.; U. Egli (1967): *Zur stoischen Dialektik;* M. Frede. (1974): *Die stoische Logik;* J. B. Gould: «Deduction in Stoic logic», en J. Corcoran, ed. (1974). o.c., pp. 169-181; J. Brunschwig: «Proof defined», en M. Schofield, M. Burnyeat, J. Barnes, eds. (1980), o.c., pp. 125-160; J. Barnes: «Proof destroyed», en M. Schofield, M. Burnyeat, J. Barnes (1980), o.c., pp. 161-181.

que no se manifiesta de suyo y sólo llega a resultar patente en el curso de la argumentación.

Las variaciones sobre este tema pueden entenderse como una suerte de evolución del pensamiento estoico, como el producto de adherencias exteriores o como posos y secuelas que fueron dejando la crítica interna, la respuesta a las objeciones externas y tal vez alguna que otra contribución foránea. No es fácil dar con una distribución justa de responsabilidades. Basta considerar la fuente principal, los textos de Sexto Empírico *M.* VIII 300-314 y *PH.* II 134-143, para hacerse una idea tanto de la variedad de formulaciones que pueden admitir la *apódeixis* o el *lógos apodeiktikós,* como de las dificultades que envuelve conjeturar su origen y sentido. Al hilo de esta consideración iré precisando el significado de los rasgos de la demostración estoica antes apuntados.

Sexto Empírico, en el texto de *M.* citado en primer lugar, utiliza una vía de clasificación para definir la idea de demostración; en el segundo texto, de *PH.*, parte de una noción preeliminar que luego desarrolla por un procedimiento análogo de división hasta llegar al concepto de demostración; esta segunda presentación es más sumaria y parece inspirada en un tratado de lógica estoica más preciso que las fuentes empleadas para algunos pasajes de la primera. En ambos casos, la presentación sigue un curso regular marcado por los tres planos o estratos básicos de una demostración; I, el sustrato primordial, a saber: su índole discursiva o argumentativa, pues no hay demostración que no sea en principio un argumento expreso; II, el nivel señalado por la validez lógica del argumento en cuestión; y por último III, el plano en el que aparece el perfil específicamente demostrativo del argumento, su fuerza explicativa o su poder epistémico.

I. Para empezar, toda demostración es una argumentación, un *lógos.* Un lógos en este contexto es «aquéllo que consta de unas premisas *[lémmata]* y de una conclusión *[epiphorá]*» (*M.* VIII 301-2); «un sistema compuesto de premisas y conclusión» (*[sýstema ek lemmáton kaì epiphorâs]* *PH.* II 135). El lógos es aquí el género propio de la demostración; en otros lugares también representa una especie de signo y esto permite cumplir a la subespecie de la demostración una función semiológica (*M.* VIII 277; *PH.* II 131). La conclusión es lo que hay que establecer a partir de las premisas; viene al final del lógos, introducida por una partícula consecutiva [«*ára*», «luego (por lo tanto, por consiguiente)»]; estas señas de identidad hacen pen-

sar en el lógos como un argumento cuya formulación se encuentra normalizada. Las premisas son «asunciones que nuestro interlocutor admite y concede porque son obvias» (*M*. VIII 302); o son «proposiciones *[axiómata]* acordadas con miras a establecer la conclusión» (*PH*. II 136). Estas dos nociones no resultan equivalentes. La de *M* supone la verdad de las premisas en razón de su obviedad; de este modo parece excluir la argumentación a partir de una o más premisas falsas y tal exclusión puede originar una relativa confusión entre el punto de la verdad de las aserciones que componen un argumento y el punto de la validez lógica del argumento. Es natural así que el proceso posterior de división que conducirá en *M* hasta la clase de las demostraciones propiamente dichas ignore luego el paso por la dicotomía entre argumentos verdaderos y no verdaderos antes de llegar a ellas. En cambio, la noción de premisa de *PH* es más general y acorde con la perspectiva dialéctica de los estoicos; en esta perspectiva cabe partir de premisas convenidas por mor de la argumentación —aunque alguna de ellas sea falsa o sólo haya sido admitida con el propósito táctico de reducirla finalmente al absurdo.

Cuando los argumentos tienen dos premisas (el caso habitual entre los silogismos no sólo aristotélicos sino estoicos), el término «*lémma*» parece reservado para la premisa mayor, para la proposición inicial cuya forma lógica apunta a una regla o un esquema de deducción que podrá convalidar el argumento (e.g. una premisa mayor de la forma «si α, entonces β» induce al uso de las reglas o esquemas que conciernen a la conectiva condicional, una premisa mayor de la forma «α y β» induce al uso de las reglas o esquemas concernientes a la conectiva conjuntiva, una premisa mayor de la forma «α o β» induce al uso de las reglas o esquemas concernientes a la conectiva disyuntiva). La premisa menor recibe entonces el nombre de «*próslepsis*» (Diógenes Laercio: *Vitae*, VII 76). Como ya veíamos en la muestra paradigmática antes citada —acerca del sudor y la existencia de poros—, es frecuente que en la demostración estoica la premisa mayor adelante una especie de conexión genérica y la premisa menor asevere un hecho particular o una condición de aplicación o de instanciación de la conexión propuesta. Los argumentos que parten de una proposición general de la forma «todo hombre (el hombre) es un animal bípedo racional» pueden reducirse a esta estructura básica mediante una reformulación de las premisas en los términos: «Si algo es un hombre, es un animal bípedo racional; ahora bien, éste es un hombre; luego...»; esta reducción no obedece

originariamente a un prurito canónico —no hay datos de que los estoicos ensayaran reducciones de los silogismos aristotélicos a los suyos propios—, sino más bien a motivos de orden filosófico: a la luz del materialismo estoico, la realidad física sólo admite la existencia de cuerpos individuales, por ende el concepto general de hombre carece de referencia real y la verdad de un aserto sobre todo hombre o sobre el hombre resulta indeterminada.

II. Naturalmente, no todo lógos es una demostración. La primera cualidad distintiva del argumento demostrativo es su validez lógica; la primera dicotomía que hemos de considerar es la división de los argumentos en concluyentes *[synaktikoí, perantikoí]* y no concluyentes. Son concluyentes «aquéllos en los que, una vez puestos de acuerdo en que las premisas valen, del acuerdo sobre las premisas aparece seguirse *[akoloutheîn phaínetai]* la conclusión» (*M.* VIII 303-5). Los argumentos concluyentes tienen entonces un carácter mixto lógico y epistemológico: envuelven una relación lógica de consecuencia, un *akoloutheîn*, y al mismo tiempo su manifestación, *phaínetai.* Esta expresión recuerda la noción de silogismo perfecto dada por Aristóteles (*APr.* I 1, 24b22-24), cuya necesidad también había de manifestarse *[phainésai tò anankaîon]* por sí misma.

Con todo, ¿podremos disponer de algún procedimiento metódico que determine la validez lógica de los argumentos concluyentes, de modo parecido a como los *Analíticos* establecían la validez de ciertos argumentos por su reducibilidad al sistema silogístico? El pasaje de *M* VIII que venimos considerando se limita a ofrecer un ejemplo de validez típico entre los estoicos, el argumento: «Si es de día, hay luz; pero es de día; luego, hay luz». Es posible que con él se quiera aludir a uno de los patrones que componen el sistema lógico estoico de reglas y esquemas de deducción, el equivalente al *Modus Ponens,* pues dicho argumento suele ser la muestra paradigmática de esta pauta deductiva. En otro lugar de *M* (VIII 413) se asegura que un argumento es concluyente al estar formulado de la forma correcta *[hugieî skhémati]. PH,* a su vez, esgrime expresamente un criterio concreto de convalidación: un argumento es concluyente «cuando el condicional *[synemménon]* que tiene como antecedente la conjunción de las premisas del argumento y como consecuente la conclusión, es correcto *[hugiés]*» (II 137). Este criterio asistemático de condicionalización también es invocado en *M.* VIII 426 —donde el condicional concluyente no es calificado de «correc-

to» sino como «verdadero *[alethés]* »; ambas calificaciones tienen un sentido equivalente en otros muchos contextos—. El criterio envuelve las dificultades inherentes a una caracterización adecuada del concepto de implicación correcta, dificultades bien conocidas por los dialécticos (Diodoro, Filón) y por los estoicos; una de las objeciones que Sexto Empírico dirige contra la idea de demostración consiste precisamente en que las discusiones sobre la corrección de la implicación o la validez del condicional impiden dilucidar de modo inequívoco y efectivo la cuestión de la validez lógica de los argumentos (*M.* VIII 427-8). Más adelante habrá ocasión de considerar este punto (vid. infra, § 3.2). De momento baste consignar que los estoicos bien podían convenir en un requisito mínimo como el expresado en *M.* VIII 332: «digamos de una vez por todas que un condicional es correcto a menos que comience con la verdad y termine con la falsedad —i.e., a menos que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso». Por otro lado, como también veremos (§ 3.3), desde Crisipo cuando menos pudieron disponer de un criterio sistemático de convalidación para sus silogismos, para argumentos válidos expresados en forma canónica: el proporcionado por un sistema peculiar de reglas y esquemas de deducción.

III. De los argumentos lógicamente válidos o concluyentes podemos pasar al tercer estrato del análisis de la demostración; es ahí donde cabe discernir los argumentos específicamente demostrativos. *PH* empieza distinguiendo entre el argumento verdadero *[alethés]* y el no verdadero: «el argumento verdadero es el que conduce lógicamente desde unas premisas verdaderas hasta una conclusión verdadera» (II 138-9). Así pues, un argumento será falso bien porque no es lógicamente concluyente o bien porque envuelve alguna premisa falsa (Diógenes Laercio: *Vitae* VII 79). Como ya he indicado, el texto de *M* pasa por alto esta distinción —aunque *M* no deje de aludir a los argumentos verdaderos en otros pasajes, e.g. VIII 417-9—. Podemos considerar esta condición de verdad como un rasgo característico de las premisas de una demostración. Indica que nos vamos a mover en el terreno de la demostración directa antes que en el terreno, no menos familiar para los estoicos, de la demostración indirecta que procede a refutar concluyentemente una suposición falsa o de la deducción apagógica en general (i.e. de la deducción a partir de alguna premisa falsa).

Además de esta condición sobre las premisas pesa otra una con-

dición sobre la conclusión del argumento demostrativo. Es la explicitada por *M.* VIII 305-6 en los términos de una distinción entre los argumentos concluyentes con una conclusión previamente o de suyo manifiesta *[pródelon]* y los argumentos concluyentes con una conclusión no previamente manifiesta o no patente de suyo *[ádelon]*. Según este texto, sería ejemplo de los primeros el argüir a plena luz del día: «si es de día, hay luz; pero es de día; luego, hay luz» —la verdad de la conclusión salta a la vista en esas circunstancias. No son éstos justamente los argumentos demostrativos, sino los que dan a conocer una conclusión no patente o no manifiesta; e.g.: los ya citados sobre la secreción de leche en los pechos y el embarazo, la secreción de sudor y los poros de la piel o cualquier otro del mismo tipo («si hay movimientos físicos, existe el vacío; hay movimientos físicos; luego, el vacío existe»).

Los estoicos también se ocupan de determinar las clases pertinentes de no patencia o no automanifestación. Hay tres clases en principio; **1.ª**, la de las cosas no patentes en absoluto *[ádela katbápax]*, como el número exacto de los granos de arena que contiene el desierto de Libia; **2.ª**, la de las cosas no patentes por naturaleza *[ádela phýsei]*, como la existencia de poros invisibles en la piel o la existencia de la imperceptible alma corpórea; **3.ª**, la de las cosas no patentes por ahora o circunstancialmente *[ádela pròs kairón]*, como la ciudad de Atenas para quien todavía no la ha visitado. Si se tiene en cuenta que las conclusiones demostradas han de ser objeto de comprensión o intelección racional (*M* VIII 147; Diógenes Laercio: *Vidas:* VII 52), consideraremos excluida la clase **1.ª** y la conclusión versará sobre cosas natural o eventualmente no manifiestas.

Por su parte, *PH* II 140 distingue entre los argumentos concluyentes demostrativos *[apodeiktikoí]* y los no demostrativos, siendo los primeros «los que concluyen por medio de premisas manifiestas algo no manifiesto»; la muestra que aduce es la familiar demostración de la existencia de poros invisibles en el cuerpo. Esta distinción corre parejas con la presentada en *M.*

A las condiciones anteriores sobre las premisas y sobre la conclusión se añade por fin una tercera, referente a una relación epistemológica que debe mediar entre ellas, premisas y conclusión. También se presenta en términos de una división, ahora entre el argumento que se limita a ser meramente procesual o progresivo *[ephodeutikós mónon]* y el argumento que resulta no sólo procesual sino también revelador *[ekkalyptikós]* (*M.* VIII 307-9; *PH.* II 141-2). Se

trata de un distingo tachado con frecuencia de oscuro. Según *M*, los argumentos del primer tipo pueden depender de la fe o de la memoria, y el ejemplo aportado reza: «Si algún dios te ha dicho que tal hombre será rico, será rico; este dios te ha dicho que tal hombre será rico; luego, será rico». El ejemplo de una argumentación progresiva y reveladora consiste en la ya tópica prueba de que el flujo de sudor revela la existencia de poros imperceptibles. El pasaje correspondiente de *PH* da a entender que los argumentos reveladores se fundan en una pertinencia intrínseca y racional de las premisas con respecto a la conclusión: la conclusión no patente es «revelada por la fuerza de las premisas» (*PH* II 140). En consonancia con esto, cabe conjeturar que los argumentos procesuales sólo aducen una prueba basada en una especie de conexión externa o empírica entre el contenido de las premisas y el contenido de la conclusión, mientras que los argumentos dotados además de poderes reveladores demuestran sobre la base de una conexión interna entre ambos; lo cual significaría reiterar de algún modo el requisito de pertinencia que ya había previsto Aristóteles al declarar que la conclusión del silogismo se sigue necesariamente de las premisas por ser éstas así (*APr.* I 1, 24b20-22). Tal vez ahora podamos adivinar un matiz diferencial entre el *lógos apodeiktikós*, el argumento demostrativo, y la *apódeixis*, la demostración propiamente dicha: el primero cumple todas las condiciones anteriores menos este último requisito de la segunda, el de envolver una relación fuerte de pertinencia en virtud de la cual llegamos a conocer la verdad de la conclusión por la sola fuerza de las premisas.

El punto de las virtudes «progresivas y reveladoras» de la demostración reviste suma importancia. En primer lugar, introduce la cuestión de si —y cómo— distinguían los estoicos entre una conexión empírica y una conexión racional (semántica, o conceptual si recordamos la alusión a las preconcepciones o prenociones que cabe leer en *PH* II 142, cuando se habla de nuestra captación previa de la imposibilidad de que un líquido pueda atravesar un cuerpo sólido compacto y no poroso); no es ésta una cuestión ajena a la manera de entender el condicional verdadero y la implicación correcta.

En segundo lugar, nos recuerda el cometido semiológico de la demostración: una demostración es una especie de signo o funciona como un signo en la medida en que clarifica la conclusión y la conjunción de las premisas es reveladora de la verdad de la conclu-

sión. Los estoicos distinguían dos tipos principales de signos o señales *[semeîa]*: el evocativo *[hypomnestikón]* y el indicativo *[endeiktikón]*. El primero señala la existencia de algo temporal u ocasionalmente no manifiesto; descansa en la memoria de las asociaciones antes observadas entre la señal y lo señalado (e.g. la visión de humo nos puede delatar una hoguera invisible por el momento). El indicativo, en cambio, señala algo no patente u oculto por naturaleza, de ahí que no pueda fundarse en una asociación observable sino en alguna otra suerte de conexión que nos lleva a conclusiones racionales (*«logidsómetha»*, *M.* VIII 155) sobre la existencia de lo significado. Salta casi a la vista una correlación del signo evocativo con la prueba «procesual» y del signo indicativo con la demostración «procesual y reveladora».

En tercer lugar, parece asimismo obvia la repercusión epistemológica de esta semiología inferencial: depara un aumento sustancial del conocimiento al conducir desde premisas manifiestas (pródela), cuya verdad ya era conocida, hasta conclusiones no manifiestas (ádela) cuya verdad aún no era conocida. Este planteamiento —aparte de que se reconozca o no su origen estoico y al margen de sus connotaciones semiológicas— ha tenido una considerable fortuna: lo podemos hallar en varios textos modernos de lógica que tratan de definir un concepto ilativo de inferencia. Sirva de muestra la noción que propone W. E. Johnson (1922-1924): *Logic,* P. II: «Demonstrative and Inductive Inference» [4]. Johnson define una inferencia ilativa de la forma «P; luego, Q» por medio de estas condiciones:

---

[4] W. E. Johnson: *Logic.* New York, 1964 reed.; I § 3, pp. 8-10. Un eco de este planteamiento son por ejemplo, las condiciones constitutivas y epistémicas de la «inferencia exitosa» que indica T. Moro Simpson en el Apéndice de su *Formas lógicas, realidad y significado,* Buenos Aires, 1975 [2]. Quizás la difusión del manual de S. Stebbing (1943): *Introducción a la lógica moderna* (México, 1975 2.ª reimp.), y sus referencias a la obra de Johnson, hayan contribuido a popularizar ese concepto de inferencia pese a que, en mi opinión, resulta bastante equívoco. Mezcla la noción ordinaria de *inferencia,* como acción que una persona realiza al inferir o llegar al conocimiento de algo a partir de algo, con el uso de «inferencia» en la jerga de los lógicos para significar la relación semántica que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento válido; las confusiones que se siguen de los híbridos de este tipo, e.g. de la mención usual de las «reglas de inferencia», son muy comunes y suelen pasar inadvertidas, aunque contribuyen a viciar las relaciones entre la dimensión lógica y la epistemológica de la deducción y tienen que ver con sonadas paradojas —por ejemplo, con la llamada «paradoja de la inferencia», vid. más adelante § 5.2 y notas (21) y (22).

(a) la proposición «P» es verdadera;

(b) hay una proposición tácita «P implica Q», que es verdadera;

(c) tanto «P» como «P implica Q» pueden ser objeto de aserción sin hacer referencia a la aserción de «Q» (en otras palabras: la verdad de «Q» no nos consta de manera previa o independiente del conocimiento de la verdad de «P» y de «P implica Q», ni la verdad de «Q» constituye un supuesto de éstas).

En cuarto y último lugar, la idea estoica de demostración parece abrigar ciertas pretensiones heurísticas dignas de mención: la perspectiva semiológica e inferencial que abre este concepto de demostración permite contemplar la conclusión de algunos argumentos de este tipo no sólo como un resultado meramente deductivo sino como el hallazgo de una explicación concreta; el discurso señala una explicación determinada del fenómeno considerado en la misma línea en que el síntoma (la leche en los pechos, el flujo de sudor, los movimientos corporales) apunta hacia su propia causa o condición determinante (el embarazo, los poros invisibles, el alma corpórea). Los rasgos indicados —en particular los tres últimos— bastan para advertir las profundas diferencias que median entre esta idea estoica y la concepción aristotélica. Aristóteles ignora las connotaciones semiológicas de la inferencia y tampoco confía en que la obtención de una conclusión constituya un aumento sustancial de nuestro conocimiento —aunque sí podamos reconocer la necesidad de que lo referido por ella es ciertamente el caso—. La heurística aristotélica se dirige más bien a la búsqueda de términos medios y el hallazgo de una explicación satisfactoria sólo puede tener lugar en las premisas —la prioridad de la explicación sobre el caso explicado se da en todos los órdenes (lógico, ontológico, epistemológico), al margen de cómo hayamos tenido la primera noticia de tal caso—; en cambio, para los estoicos esa explicación —la causa o la condición determinante de lo conocido u observado— vendrá a cumplirse con la conclusión del argumento. Una demostración estoica no está dirigida por sino que se dirige a la explicación mejor del fenómeno considerado.

Al final del breve recorrido que hemos hecho por algunos textos de Sexto Empírico, nos encontramos con una concepción un tanto multiforme de la demostración. El planteamiento de *M* da lugar a esta vía de identificación: argumento ⇒ concluyente ⇒ con una conclusión no manifiesta ⇒ progresivo y revelador. El planteamiento de *PH* sigue en cambio la dirección: argumento ⇒ concluyente

⇒ verdadero ⇒ demostrativo (i.e. con una conclusión no manifiesta) ⇒ procesual o progresivo / progresivo y revelador. Son dos líneas de caracterización que no parecen definir en último término una misma clase de argumentos, así que no estarán de más algunas precisiones.

La noción que resulta de las divisiones y subdivisiones de *M* VIII 301-309 supone, como ya he indicado, cierta indistinción entre el punto de la validez lógica del argumento y el punto de la verdad efectiva de sus componentes proposicionales. Señalemos esta noción como **«demostración$_1$»**. Es curioso que a continuación (310), Sexto Empírico quiera recapitular esta línea de análisis en los términos: «Siendo así las cosas, una demostración deber ser primeramente un argumento, en segundo lugar concluyente, en tercer lugar *verdadero,* en cuarto lugar con una conclusión no manifiesta, y, en quinto lugar, revelada por la fuerza de las premisas». Las cursivas marcan la introducción del rasgo antes ausente que pasa luego (311-313) a justificar. Digamos que ahora se trata de la **«demostración$_2$»**. Luego Sexto Empírico se cree obligado a una nueva recapitulación: «Cuando todas estas características se hallan juntas y el argumento es concluyente y verdadero y revelador de un conclusión no manifiesta, hay una demostración» (314); sea la **«demostración$_3$»**, que sólo difiere de la anterior por no recoger expresamente el rasgo de pertinencia en virtud del cual las premisas revelan la conclusión. Para colmo, el pasaje (314) finaliza con esta noción sintética: «la demostración es un argumento que, a través de premisas convenidas, es concluyentemente revelador de un conclusión no manifiesta»; la verdad es que una síntesis de este tenor, a esas alturas del texto, resulta pobre y relativamente ambigua.

Esta idea sumaria que da fin a la presentación de *M* es precisamente la que inicia el planteamiento seguido en *PH,* si bien en este nuevo contexto sólo tiene un carácter preliminar: «Una demostración es un argumento que, a través de unas premisas convenidas, conduce concluyentemente hasta una conclusión no manifiesta» (II 135). Tal formulación no depende ahora de clasificaciones o de distinciones previas; se limita a reunir y presentar de entrada los rasgos básicos de la idea estoica de demostración. Podemos asignarle el nombre de **«demostración$_0$»**. El desarrollo posterior de *PH* arroja un concepto muy similar a la definición de la **demostración$_2$** en *M.* Creo que apenas se puede apreciar algo más que variaciones terminológicas, e.g. el uso de «demostrativo» para significar que el argu-

mento posee una conclusión no manifiesta. La formulación final reza: «...la demostración debe ser un argumento concluyente, verdadero, con una conclusión no manifiesta revelada por la fuerza de las premisas» (140); salta a la vista su correspondencia con el concepto de **demostración$_2$**, dado en *M.* VIII 310, que acabo de mencionar.

Ante este repertorio de definiciones de la demostración, tal vez sea lícito aventurar algunas conjeturas como las siguientes. La **demostración$_0$** representa seguramente la idea seminal y quizás provenga de Zenón, el fundador de la Stoa. La **demostración$_1$** es una versión clasificatoria torpe, un ensayo analítico algo confuso que luego hay que revisar; no sabemos si procede de algún autor de la Stoa antigua o de algún manual posterior —en todo caso, el culpable de ella no se distingue precisamente por sus luces lógicas—. Y, en fin, es de creer que la **demostración$_2$** constituya el concepto propiamente estoico de demostración; podemos cargar sobre los hombros de Crisipo tal responsabilidad, de modo parecido a como hacemos recaer sobre él lo mejor y más granado de la lógica estoica; un motivo en favor de esta atribución es la afinidad de esta idea de demostración con el modo «crisípeo» de entender el condicional válido o la implicación correcta: en ambos casos media una especie de conexión racional o interna entre las premisas, el antecedente, y la conclusión, el consecuente. Si el estilo más escueto e impersonal del pasaje de *PH* quisiera decir algo, pensaríamos que la versión de *PH.* II 140 queda más próxima a la concepción original de Crisipo mientras que la versión de *M.* VIII 310 se mueve más bien en el contexto de una reconstrucción del propio Sexto Empírico. Las nociones o formulaciones restantes —en particular la que he designado como **demostración$_3$**— podrían deberse también a recapitulaciones sumarias de este mismo autor.

Ya he aludido a algunas peculiaridades que distinguen la idea estoica de demostración de la idea avanzada por Aristóteles en los *Analíticos*. Pero las diferencias apuntadas se acusarán con más nitidez y la originalidad de la contribución estoica se apreciará mejor, si ahora prestamos atención al modo singular como los estoicos entendían la dimensión lógica y la proyección epistemológica de los argumentos destinados a probar que algo efectivamente se da o es el caso [*«hupárkhei»*, en el argot estoico]. Por lo demás, en la medida en que los estoicos no se ocupan de la constitución deductiva de los cuerpos de conocimiento (e.g. de una «axiomatización») ni, en general, de las ciencias demostrativas, no tendrá objeto abordar

su dimensión metodológica de forma parecida a como antes hubimos de hacer a propósito del programa aristotélico.

3. *Dimensión lógica.*

De acuerdo con la idea de demostración que estamos considerando, el primer requisito que debe satisfacer un argumento demostrativo es el de ser lógicamente concluyente. Un argumento será lógicamente concluyente si su conclusión se sigue *[akoloutheî, hépetai]* de las premisas en el curso de una deducción manifiestamente válida. Esta noción genérica ya latía en el silogismo perfecto de Aristóteles, pero cobra mayor alcance en la lógica estoica y hoy constituye un punto de partida habitual en el análisis lógico del concepto de prueba deductiva. Si nos atuviéramos a generalidades de este orden, nada nos parecería nuevo bajo el sol.

La noción señalada incluye dos aspectos que conviene distinguir. Siguiendo un convención frecuente, supongamos que «P» designa el conjunto de las proposiciones que se aducen como premisas en un argumento concluyente A, y «Q» designa la conclusión de este argumento. El primer aspecto a destacar consiste en la existencia de una relación de consecuencia lógica entre P y Q; se trata de una mediación semántica a la que nos referimos al decir que Q se sigue de P y su presencia no constituye ni un hecho físico ni un hecho de conciencia. El segundo aspecto es —digamos— pragmático y consiste en la realización de una deducción válida correspondiente; a través de ella advertimos que Q se sigue de P, A se nos muestra lógicamente concluyente y podemos servirnos de A con diversos fines teóricos o metodológicos. Cabe añadir entonces que la existencia de un nexo de consecuencia lógica es la condición fundamental y necesaria de la identificación de A como un argumento lógicamente concluyente, mientras que la verificación de ese nexo en los términos de una deducción válida representa una marca de acreditación suficiente.

Los estoicos, según es bien sabido, desvelaron la dimensión semántica de las aserciones que componen un argumento y procuraron determinar el sentido de la conexión ilativa de «seguirse de». Pero no está claro que apreciaran la distinción entre los ingredientes semánticos y pragmáticos del uso argumental de la implicación —al parecer, tampoco apreciaron esta diferencia en el uso asertivo de la

proposición: el lektón de una expresión enunciativa no sólo es el contenido significativo de lo que se enuncia sino también lo que uno quiere decir al enunciarlo—. En todo caso, es dudoso que llegaran a formarse un concepto lógico formal de consecuencia parecido al nuestro. Si preguntáramos a los estoicos por la razón de ser o por el fundamento de la argumentación lógicamente concluyente, no responderían a buen seguro con un análisis semántico estructural de la relación de «seguirse de». En lugar de ello se remitirían al lógos inmanente y común que subyace en el orden de todas las cosas, y viene a reflejarse en el orden debido del discurso y en el orden propio del conocimiento. Un nexo lógico entre proposiciones o aserciones también es de suyo una especie de nexo natural.

3.1

Dejando ahora al margen este presupuesto filosófico y a tenor de los testimonios que poseemos, los estoicos procuraron identificar la argumentación concluyente no por la vía de la explicación de la relación de consecuencia, sino por el camino más franco y accesible de unas señas de identidad: cómo podemos identificar las formas de argumentación que efectivamente la envuelven. Es una estrategia similar a la de Aristóteles. Partiendo de una idea general y un tanto vaga de «seguirse de», se conforman con hallar criterios suficientes para discernir las formas básicas de la argumentación concluyente. Un criterio de este tipo viene a proceder del modo siguiente: si el argumento A cumple tal o cual condición, A tiene tal o cual calificación lógica. Entonces cabe pensar en criterios de **convalidación,** que siguen la pauta: «Si A cumple la condición C, A es un argumento lógicamente concluyente», y en criterios de **invalidación,** que siguen la pauta: «Si A cumple la condición C*, A es un argumento lógicamente inválido».

Aristóteles ya había adelantado una especie de criterio de invalidación al sugerir un procedimiento para eliminar simultáneamente varios esquemas deductivos por medio de su contrainstanciación, mediante los llamados «ejemplos contrastados» (e.g., en *APr.* I 4, 26a3 ss.; vid. supra, c. 2, § 2.3, supuesto A 1). Los estoicos carecieron de criterios de invalidación semejantes al aristotélico. Cuando hablan de argumentos inválidos se limitan a mencionar clases distintas sin hacer referencia, al menos en las fuentes disponibles, a una clave

unitaria o un principio de clasificación. Entre los argumentos inválidos *[asýnaktoi, apérantoi]*, los hay **incoherentes, redundantes, mal formados** y **deficientes** (*M* VIII 429-434; *PH* II 146-150). Son incoherentes los que no presentan conexión lógica alguna de las premisas entre sí o con la conclusión (e.g.: «Si es de día, hay luz; se vende trigo en el mercado; luego, Dión pasea»). Los redundantes son aquellos que aducen premisas innecesarias, bien por ser enteramente ociosas o bien por revestir mayor complejidad que la requerida para extraer la conclusión (e.g.: «Si es día, hay luz; es de día y Dión pasea; luego, hay luz»). Los argumentos mal formados equivalen a falacias como la de afirmar un consecuente para sentar su antecedente o negar un antecedente para rebatir su consecuente (e.g.: Si es día, hay luz; no es de día; luego, no hay luz»). Los deficientes son en fin aquellos que contienen alguna premisa incompleta o demasiado débil (e.g.: «La riqueza es buena o mala; no es mala; luego, es buena», argumento que incurre inicialmente es una disyunción no exhaustiva al no tener en cuenta que la riqueza también puede considerarse como una eventualidad indiferente desde el punto de vista moral, ni mala ni buena).

Los criterios de **convalidación** pueden ser, a su vez, sistemáticos o asistemáticos. Un criterio **sistemático** de convalidación identifica una clase de argumentos concluyentes por relación a un sistema lógico. Al referirnos a un sistema lógico hemos de pensar cuando menos en dos cosas: en la existencia de un conjunto relativamente definido de expresiones que componen el lenguaje del sistema y en la existencia de un conjunto relativamente definido de series ordenadas de expresiones enunciativas de dicho lenguaje, series que constituyen a su vez las secuencias deductivas del sistema. Si el sistema lógico en cuestión es un sistema formalizado, la definición de uno y otro conjunto puede ser efectiva (recursiva); pero naturalmente no son de ese tipo ni tienen este grado de definición los sistemas lógicos construidos por los antiguos griegos. En todo caso, un criterio sistemático discurre con arreglo a pautas como la siguiente: A es un argumento válido si

(i) A tiene una expresión canónica A′ en el lenguaje de un sistema lógico determinado S;
(ii) A′ es una secuencia deductiva perteneciente a S.

La silogística aristotélica, como ya hemos visto, aspiraba a representar un criterio de convalidación en este sentido, para cualquier

deducción válida que se dejara formular en términos silogísticos: esa deducción válida, así normalizada, sería una instancia de alguno de los modos, perfectos o imperfectos, del sistema. En la medida en que todo sistema lógico comporta una teoría más o menos expresa sobre la relación de consecuencia, un criterio sistemático no sólo define una clase de argumentos válidos sino que, de paso, apunta algún rasgo estructural del nexo de consecuencia que se da en los argumentos de esta clase. A esta ventaja analítica se une un inconveniente: bajo esta óptica sólo se podrá reconocer la argumentación que encaje dentro de los moldes lingüísticos y deductivos del sistema. Frente a las pretensiones un tanto desmesuradas de los epígonos de Aristóteles que creían calzar cualquier argumento válido en sus zuecos silogísticos, los estoicos admitieron la existencia de argumentos «no metódicamente concluyentes», argumentos válidos que no cabía reducir a los patrones de convalidación reconocidos por su propio sistema. Disponían, desde luego, de otro medio de reconocimiento, de un criterio asistemático.

Un criterio de convalidación es **asistemático** cuando identifica los argumentos concluyentes por alguna característica distintiva que en principio no depende de un sistema lógico determinado. Los criterios de este tipo no cuentan entonces con la significación teórica de los sistemáticos pero pueden tener sobre éstos la ventaja de asomarse a un ámbito de argumentación más amplio y diversificado. El carácter relativamente abierto y neutral de un criterio asistemático aconseja empezar por ahí el examen de la contribución estoica a la lógica de la demostración. Luego veremos el criterio asociado al sistema estoico de reglas de deducción, y podremos observar alguna diferencia sustancial entre este sistema y el aristotélico. Pero antes que nada conviene situarse en la perspectiva que los propios estoicos podían estimar adecuada para una y otra vía de convalidación.

Según *M* VIII 413, 445, reconocemos que un argumento es concluyente al estar formulado de la forma correcta *[dià tò en hygieî erotêsthai skhémati]*. Esta indicación, sin ser muy precisa, apunta una relación entre la validez de un argumento y una determinada forma *[skhéma]*. Hoy diríamos que la forma en cuestión es la forma o estructura lógica del argumento: A es un argumento concluyente al poseer una forma lógica válida. Como la forma lógica de A es el conjunto de todos los argumentos que comparten con A esa misma estructura lógica, la validez de A no representa un atributo peculiar de este argumento sino una cualidad general del conjunto de los

argumentos que revisten dicha forma. Al parecer, nada tienen que oponer los estoicos a este punto de vista. Pero ello no significa que la idea estoica de la forma correcta se corresponda exactamente con nuestra concepción de la forma lógica. Por lo demás, la idea estoica coincidirá menos aún con los planteamientos actuales que hacen depender la validez de un argumento de un forma lógica subyacente presuntamente genuina, bien porque suponen la existencia de unas plantillas lógicas en el lenguaje natural o bien porque, en general, suscriben la llamada «doctrina de la lógica como forma» [5]. En la perspectiva estoica, si un argumento es concluyente puede mostrar su validez al presentarse bajo una forma determinada; pero esto no implica en absoluto que tal argumento sea justamente válido en razón de esa forma, debido a su construcción formal. De ahí que el cargo de «formalismo» que pesa tradicionalmente sobre el análisis lógico estoico resulte una atribución equívoca —al igual que es equívoca su reivindicación moderna en parecidos términos—. Los estoicos son «formalistas» si por ello se entiende un especial interés en precisar la forma correcta de los argumentos concluyentes a fin de lograr un criterio efectivo de convalidación. (En este sentido son menos informales que sus críticos aristotélicos). Los estoicos no son formalistas si por «formalismo» entendemos la determinación o la definición puramente formal de las propiedades lógicas de un aserto o de un conjunto de asertos.

3.2

Pues bien, ¿cuál puede ser esa «forma correcta» que permite reconocer los argumentos lógicamente concluyentes? Los estoicos hallaron dos respuestas. La primera consiste en el criterio asistemático de condicionalización: un argumento es lógicamente concluyente siempre y cuando al ser reformulado como una proposición condicional adquiere la forma de una implicación verdadera o correcta.

---

[5] Sobre los planteamientos de este tipo, vid. B. Stanosz: «Logical form», en W. Marciszewski, ed.: *Dictionary of Logic*, The Hague/Boston, 1981, pp. 178-182, Cf. también el informe crítico de J. Etchemendy: «The doctrine of logic as form», *Linguistics & Philosophy*, 6 (1983), pp. 319-334. La creencia en que hay unas formas lógicas que subyacen en el lenguaje —o, como algunos dicen en la estela de Chomsky, pertenecen a su estructura profunda— es una directriz contemporánea del análisis lógico que podría remontarse, como mucho, al análisis medieval de las propiedades de los términos (en particular, a algunas teorías sobre la «*suppositio*»).

Una proposición condicional *[synemménon]* es un proposición compuesta, une un antecedente o prótasis y un consecuente o apódosis mediante la conectiva, «si *[ei]*», e.g.: «si es de día, hay luz»; también afirma que lo segundo se sigue *[akoloutheî]* de lo primero. El criterio de condicionalización consiste en lo siguiente de acuerdo con Sexto Empírico: «Dicen ellos que el criterio de validez es éste: un argumento es concluyente cuando la conclusión se sigue de la conjunción *[symplokê]* de las premisas... Así, un argumento es efectivamente concluyente cuando, una vez que hemos conjuntado las premisas y formado el condicional que tiene por antecedente la conjunción de las premisas y por consecuente la conclusión, se halla que este condicional es correcto» (*M* VIII 415-417). «Dicen que un argumento es concluyente siempre que hay un condicional verdadero que tiene por antecedente la conjunción de las premisas y por consecuente la conclusión» (*M* VIII 426). «Se considera válida una demostración cuando la conclusión se sigue de la conjunción de las premisas como un consecuente se sigue de un antecedente» (*PH* II 113, 135). Por ejemplo, sea el argumento A: «Si es de noche, está oscuro; es de noche; luego, está oscuro». A será concluyente siempre que el condicional: «Si [(si es de noche, está oscuro) y (es de noche)], entonces está oscuro» sea un condicional verdadero *[alethés]* o correcto *[hygiês]* —ambas calificaciones son intercambiables en este contexto—.

El criterio así expuesto parece confuso pues, a nuestros ojos, no deja de mezclar referencias un tanto heterogéneas. Nosotros llamaríamos «proposición condicional» a un compuesto de prótasis y apódosis; en cambio, denominaríamos «aserción de implicación», a la afirmación de un nexo en el que un consecuente se sigue de un antecedente; diríamos que este aserto puede expresarse en los términos de un enunciado condicional pero no precisamente verdadero sino lógicamente válido o, si se quiere, en los términos de una implicación correcta. Desde unos supuestos lingüísticos, dialécticos y filosóficos distintos de los nuestros, los estoicos se vieron en la tesitura de afrontar el problema de determinar cuál es el condicional verdadero o correcto, cuándo y cómo podemos apreciar que el consecuente se sigue del antecedente. La discusión al respecto ya había prendido entre los dialécticos del s. IV a.n.e. (Filón de Megara, Diodoro Crono) y llegó a tener a los dialécticos del siglo siguiente sobre ascuas («Hasta los cuervos graznan en los tejados en torno a la cuestión de qué condicionales son los verdaderos», comentaba

Calímaco, bibliotecario de Alejandría por los años 250 a.n.e.). Desde luego, tan encendido debate no podía responder únicamente al prurito técnico de definir un criterio efectivo de convalidación de la argumentación concluyente; es probable que se alimentara de la amplia significación lógica, espistemológica e incluso semiológica, que las proposiciones condicionales habían adquirido en la dialéctica estoica.

Sexto Empírico da noticia de cuatro posiciones encontradas acerca del condicional verdadero o correcto (*PH* II 110-111). 1.ª/ Según Filón, es correcto el condicional que no comienza con una verdad y concluye con una falsedad. La verdad o corrección del condicional parece depender únicamente de los valores veritativos de las proposiciones componentes y éstas pueden referir estados de cosas aleatorios e independientes entre sí, e.g.: «Si es de día, estoy conversando» es una aserción correcta cuando, siendo de día, estoy conversando.

2.ª/ Según Diodoro, el condicional correcto es más bien aquél que ni era ni es posible que comience con una verdad y concluya con una falsedad. Dentro de la peculiar concepción diodórica de las modalidades, cabe entender que esta exigencia representa la verificación universal y constante de un condicional filónico generalizado: en cualquier momento en que tenga lugar la aserción de un condicional correcto nunca se dará el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente sea falso. Con arreglo a este criterio, el ejemplo antes expuesto no sería aceptable mientras que sí lo es el siguiente: «Si no hay elementos atómicos de las cosas, entonces hay elementos atómicos de las cosas»; como, a juicio de Diodoro, hay efectivamente elementos atómicos, la aserción de este condicional siempre partirá de un antecedente falso y terminará con un consecuente verdadero o, en otras palabras, nunca comenzará con un antecedente verdadero para concluir con un consecuente falso.

3.ª/ Otros —empezando seguramente por Crisipo— introducen la idea de conexión *[synártesis]* y sostienen que un condicional es correcto siempre y cuando la proposición contradictoria de su consecuente sea incompatible con el antecedente. Ni el ejemplo filónico ni el diodórico satisfacen este requisito, pero sí lo cumple un condicional del tenor: «Si es de día, es de día». No es fácil precisar el sentido de la conexión que media entre el antecedente y el consecuente del condicional —digamos— crisípeo. A la luz de ciertos

testimonios (e.g. Filodemo: *De signis,* XXXV 5), la *synártesis* significa un nexo necesario e intrínseco entre ambos componentes y se mueve en el ámbito de una relación de implicación tan fuerte como la hoy conocida por el nombre de «entailment», a través de la cual el antecedente entraña («entails») el consecuente. Tampoco está clara la incompatibilidad del antecedente con la negación del consecuente; una glosa de Alejandro (*In Top.* 93.10) da a entender que si la proposición α es incompatible *[mákhetai]* con la proposición β entonces es necesario que cuando se dé el caso de α —cuando sea verdad que α— no se dé el caso de β justamente en razón de que α es el caso. De adoptar estas versiones, el criterio crisípeo significaría que sólo es correcta la implicación necesaria que comporta una pertinencia interna del antecedente con respecto al consecuente. Esta lectura aproxima la conexión de Crisipo al nexo silogístico de Aristóteles (vid. supra II, § 2.1); a veces tanto que la *synártesis* llegaría excluir la corrección de ciertos condionales apagógicos (e.g. el esquema: «si no α, entonces α» o sus variantes, a tenor de Sexto Empírico: *PH* II 189). Pero creo que no conviene identificar la conexión crisípea y el nexo aristotélico [6].

4.º/ Hay, por último, quienes afirman que es correcto el condicional cuyo consecuente se halla contenido virtualmente *[dynámei]* en el antecedente, criterio que descarta la corrección del ejemplo crisípeo y, en general, de cualquier condicional reiterativo. Puede representar la condicionalización correspondiente al silogismo científico aristotélico —en cuyo contexto, de las cosas sentadas como antecedente se habrá de seguir alguna otra distinta como consecuente—, y suele atribuirse no tanto a los estoicos como a sus críticos peripatéticos.

[6] Vid. A. R. Anderson, N. D. Belnap: *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity.* I. Princeton, 1975. En §29.8.1, p. 435, se denomina «lógica conexiva» una formalización del tipo de implicación atribuido a Crisipo. Sin embargo, esta formalización supone unas restricciones (e.g.: la exclusión de que la negación de una proposición α implique esta misma proposición α) que caracterizan a la tradición aristotélica sin que, por lo regular, fueran reconocidas o respetadas por la argumentación estoica. Así pues, esa lógica «conexiva» parece más bien una lógica del nexo silogístico peripatético —si acaso, tiene que ver con el criterio de implicación correcta que Sexto cita a continuación—. También puede que las observaciones de *PH* II 189 ss. contra ciertos argumentos apagógicos traigan a colación este 4.º criterio, de aire peripatético, en vez de hacer referencia justamente al crisípeo como supone M. Nasti (1981): «Logica scettica e implicazione stoica», art. c.

El criterio de condicionalización trata de recoger una intuición básica sobre la validez lógica de una argumento, a saber: no pueden darse a la vez estas tres posibilidades: (i) A es un argumento concluyente; (ii) las premisas de A son verdaderas; (iii) la conclusión de A es falsa.

Los estoicos parecen pensar que una garantía de que (ii) y (iii) no tienen lugar conjuntamente, basta para asegurar que A es un argumento concluyente, y esta garantía es la obtenida mediante la formulación de A como un argumento correcto. Los cuatro criterios reseñados por Sexto Empírico pueden cumplir este propósito. Su disposición sugiere una secuencia ordenada que va gradualmente desde la caracterización más débil hasta la más fuerte y restrictiva —el criterio filónico estipula la condición mínima que ha de respetar un argumento de la forma «si α, β; α; luego, β» para merecer la consideración de concluyente—. Pero no sabemos si el orden de exposición de Sexto Empírico respondía de hecho a esta o alguna otra intención. Sea como fuere, las escasas referencias que tenemos acerca del criterio asistemático de condicionalización sólo nos permiten conjeturar dos cosas: (a) los estoicos, tanto por motivos dialécticos como por motivos epistemológicos, se hicieron cargo de dos de estas versiones de la implicación correcta, la versión diodórica y la versión crisípea; (b) lo más probable es que, por lo regular, se atuvieran a esta última. En todo caso, el criterio crisípeo es el que mejor cuadra con la noción estoica de consecuencia y se basta para cubrir la pretensión de que si un consecuente se sigue de un antecedente, entonces media alguna suerte de conexión sustancial entre ambos términos de manera que el segundo puede oficiar como signo indicativo o revelador del primero (recordemos que las premisas del argumento demostrativo dan a conocer de igual modo la verdad de la conclusión).

3.3

Los estoicos dispusieron asimismo de un criterio sistemático de validez, de un sistema lógico de esquemas de argumentación concluyente *[synaktikoí skhémata]* cuya elaboración se atribuye a Crisipo. Mencionaré este sistema por la abreviatura «Σ». Todo argumento que se amolde a los términos de uno de los esquemas de Σ constituye un «silogismo», i.e. un argumento concluyente cuya va-

lidez se pone de manifiesto mediante su reducción canónica al lenguaje de Σ y su convalidación sistemática en Σ.

El lenguaje de Σ consta de estos elementos principales: a/ Un conjunto de expresiones ordinales esquemáticas («lo primero», «lo segundo» ...) que, en principio, marcan el lugar correspondiente a aserciones simples cualesquiera como las tipificadas por enunciados deliberadamente triviales («es de día», «Dión pasea», «no hay luz»); pero, llegado el caso, también se dejan sustituir por otros esquemas asertivos simples o compuestos. b/ Un conjunto de conectivas *[sýndesmoi]:* la condicional, la conjuntiva, la disyuntiva, que forman aserciones compuestas a partir de otras aserciones simples o compuestas. c/ Un conjunto de esquemas deductivos formados por dos premisas y una conclusión. Podemos entender un esquema deductivo como la expresión normalizada de un patrón de deducción y un patrón de deducción no es otra cosa que una clase de argumentos concluyentes de la misma forma lógica; equivale al modo silogístico.

En general, un esquema deductivo pertenece al sistema Σ si y sólo si es un modo indemostrado *[anapódeiktos trópos]* de Σ o es analizable en —reducible a— los términos de alguno de los contados modos indemostrados de Σ. (Esta calidad de no demostrados responde a la índole simple y obvia de ciertos esquemas de Σ, así como a su posición primordial en el sistema, y tiene poco que ver con la idea anterior de demostración o de argumento demostrativo: los *anapódeiktoi* son la versión estoica de los modos perfectos del sistema aristotélico). La lista de esos contados modos indemostrados del sistema estoico no es fija ni uniforme en todas las fuentes, aunque siempre sea cerrada; por lo regular son cinco los que se estiman básicos y seleccionados por el propio Crisipo.

I. Si lo primero, lo segundo;
pero lo primero;
luego lo segundo.

II. Si lo primero, lo segundo;
pero no lo segundo;
luego, no lo primero.

III. No a la vez lo primero y lo
segundo; pero lo primero;
luego, no lo segundo.

IV. O lo primero o lo segundo;
pero lo primero;
luego, no lo segundo.

V. O lo primero o lo segundo;
pero no lo segundo;
luego, lo primero. (*M* VIII 224 ss.; *PH* II 157-158.)

No sabemos si esta agrupación de modos primitivos responde a alguna clave lógica (estructural) de selección y clasificación; y de ser así, tampoco parece fácil adivinar cuál podría haber sido [7].

---

[7] Por ejemplo, sabemos que en tiempos de Cicerón (*Topica*, xiii 53-xiv 57) ya se habían añadido dos modos más y que, por este u otro motivo, hubo intentos de dar al conjunto un principio de organización (vid. Boecio, *In Ciceronis Topica*, 358). Los modos adicionales fueron:

VI. No a la vez esto y aquello;
pero esto;
luego, no aquello.

VII. No a la vez esto y aquello;
pero no esto;
luego, aquello.

A primera vista, VI no es sino una versión de III y VII resulta inválido, como apuntan los Kneale (1961: *El desarrollo de la lógica*, edic. c., p. 170). Si se toma una reformulación de III que recoge Marciano Capella: «No a la vez lo primero y no lo segundo; pero lo primero; luego, lo segundo», cabría suponer que I-III (en esta versión) se atienen a una directriz condicional en tanto que IV-VI desarrollan la disyunción excluyente. Frede (1974: *Die stoische Logik*, o.c., pp. 164 ss.) conjetura que VI y VII son los modos propios de subdisyunción. Una disyunción estoica se compone de disyuntos enteramente incompatibles: no pueden ser ambos verdaderos o falsos a la vez, conforme a IV-V; en cambio, una subdisyunción se compone de disyuntos no incompatibles en ese sentido: no pueden ser verdaderos a la vez, pero sí pueden resultar ambos falsos o uno solo de ellos verdadero. VI y VII serían los cánones de una subdisyunción introducida por una negación conjunta como premisa mayor distintiva —aun así sigue sin estar clara la validez de VII—. Sin embargo Boecio, en el lugar ya indicado, no considera VI y VII modos de esta subdisyunción sino derivaciones de la disyunción excluyente pautada en IV y V. Tal interpretación sugiere este criterio de clasificación: los modos I-III son los primitivos correspondientes al condicional —presuponiendo la versión crisípea de la implicación hasta el punto de que si es verdad «si α, β» entonces «si α, no β» es una composición de proposiciones incompatibles como la presente en el modo III leído a la manera de Capella (Boecio: *In Cic. Top.*, 355-356); los dos modos siguientes, IV y V, corresponden a la disyunción excluyente; los dos últimos, en fin, a la conjunción derivada de esa disyunción. Vid. una discusión más detallada en E. Stump: «Boethius's *In Ciceronis Topica* and Stoic logic», en J. F. Wippel, ed.: *Studies in Medieval Philosophy* (Washington, 1987), pp. 1-22.

En todo caso, con esta selección de esquemas primitivos, los estoicos —en particular Crisipo— pretendían seguramente recoger los patrones primordiales de la deducción en cualquier ámbito de discurso (el dialéctico u ordinario, el filosófico, el científico). Los patrones señalados se consideraban primordiales no sólo por su entidad propia, en razón de su estructura relativamente simple y en virtud de su uso paradigmático como formas obvias de argumentación concluyente, sino también por su capacidad para convalidar cualquier otro esquema derivado de Σ. Esta convalidación de los esquemas derivados de Σ procede por una vía de reducción semejante a primera vista a la resolución de los modos imperfectos en los perfectos dentro de la silogística aristotélica. Pero el sistema estoico es algo más complejo que el aristotélico, y su análisis formal parece bastante más preciso y cuidado.

La reducción estoica de los modos demostrables a los indemostrables conlleva el uso de ciertas metarreglas de deducción o principios rectores *[thémata]*. Las fuentes aluden a cuatro pero hoy sólo conocemos la formulación de dos de ellos. El primero reza: «Si de dos proposiciones se deduce una tercera, entonces de una cualquiera de las dos junto con la negación de la conclusión se deducirá la negación de la restante» (Apuleyo: *De Interp.* XII 277-278). Aristóteles (*APr.* II 4, 57a38-b3) ya había asumido este principio en el caso de la reducción indirecta. El otro *théma* viene a decir: «Si de dos proposiciones se deduce una tercera y una de ellas puede seguirse a su vez de otras premisas, entonces de la otra proposición junto con las nuevas premisas también se deduce la conclusión original» (Alejandro: *In An. Pr.* 278 6 ss.). Se conjetura que otro principio podría ser de este tenor: «Si contamos con unas premisas de las que se sigue una conclusión, podemos contar asimismo con esta conclusión virtualmente contenida en ellas aunque no haya sido explícitamente formulada» (vid. *M* VIII 231). Es posible, en fin, que el sistema estoico se permitiera un uso de la condicionalización en esta calidad de metarregla o de principio rector: gracias a ella un esquema deductivo previamente establecido podría reformularse como un aserto condicional y oficiar como premisa en el curso de la deducción subsiguiente. Este servicio sería similar al que hoy desempeña en nuestros sistemas lógicos estándar la llamada «(meta)regla de deducción»: si de un conjunto de enunciados Γ y del enunciado α se sigue el enunciado β, entonces de Γ se sigue el enunciado condicional $\alpha \rightarrow \beta$ —en el caso de $\Gamma = \varnothing$, si la secuencia deductiva $<\alpha... \beta>$

pertenece al sistema considerado «$\alpha \rightarrow \beta$» será también una tesis del sistema—. Todo lo cual puede interpretarse como una absorción sistemática del criterio asistemático de condicionalización, si dejamos al margen la conexión de pertinencia interna que comporta la versión crisípea de éste último. Por último, la reducción de los modos demostrables a los indemostrados puede recurrir ocasionalmente a truísmos o proposiciones lógicas que los estoicos estimaban incontrovertibles, e.g. el principio de tercero excluido.

Veamos, como ejemplo de este análisis reductivo la resolución de un esquema derivado de Σ, notable entre otras cosas por representar al patrón básico de la reducción al absurdo: «Si lo primero, lo segundo; si lo primero, no lo segundo; luego, no lo primero». Orígenes (*Contra Celsum*, VII 15) da fe de él y de una instancia argumental interesante: «Si sabes que estás muerto, estás muerto (pues nada que sea falso puede saberse); si sabes que estás muerto, no estás muerto (porque los muertos nada pueden saber); luego, no sabes que estás muerto»; pero de su reducción efectiva no hay noticias, así que seguiré una pauta de reconstrucción marcada por los Kneale (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica*, o.c., p. 163. Se suponen previamente derivados los esquemas que los Kneale designan por los números *10: «O lo primero o no lo primero; pero lo primero; luego, no (no lo primero)» —reducible directamente al indemostrado IV— y *12: «si lo primero, no lo segundo; pero lo primero; luego, no (si lo primero, lo segundo)» —cuya reducción, algo más complicada, puede verse también en la o.c. de los Kneale, p. 162—. Partimos entonces de las premisas:

1. Si lo primero, lo segundo.
2. Si lo primero, no lo segundo.

El principio de condicionalización, aplicado al esquema *12, permite introducir la aserción:

3. Si [(si lo primero, no lo segundo) y lo primero], entonces no (si lo primero, lo segundo).

De la instanciación del esquema *10 en los términos de la premisa 1 resulta el esquema: «O (si lo primero, lo segundo) o no (si lo primero, lo segundo); pero si lo primero, lo segundo; luego, no (si lo primero, lo segundo)». En su virtud, de 1 y de *10 se sigue:

4. No [no (si lo primero, lo segundo)].

Ahora bien, con las sustituciones oportunas, la aserción 3 puede constituir la primera premisa del indemostrado II y la aserción 4, a su vez, la segunda premisa de este mismo modo. La conclusión, mediante esta aplicación de II, resulta:

5. No [(si lo primero, no lo segundo) y lo primero].

Este aserto equivale a la aserción de «No a la vez [(si lo primero, no lo segundo) y lo primero]», que reviste la forma cabal de la primera premisa del indemostrado III; parejamente la premisa 2 puede tomarse como la segunda premisa de este mismo patrón; así que, por III, de 5 y 2 concluimos:

6. Luego, no lo primero.

En suma, el esquema en cuestión, «Si lo primero, lo segundo; si lo primero, no lo segundo; luego, no lo primero», se resuelve o analiza deductivamente en los modos primordiales II y III, a través del principio de condicionalización y de otros esquemas, *12 y *10, previamente reducibles.

Este proceder es hasta cierto punto afín al que hoy seguimos en nuestros sistemas de deducción natural, dentro del ámbito lógico de las conectivas de enunciados. Lo que los estoicos veían como reducción de los esquemas deductivos convalidables en Σ a los modos indemostrados de Σ, nosotros podemos verlo a la inversa, como la síntesis o la abreviatura de una o más reglas primitivas del sistema en los términos de otra regla derivada. Pero hay una peculiaridad de Σ que conviene destacar en este contexto. Aprovechando una sugerencia de J. Corcoran (1974): «Remarks on stoic deduction», l.c., pp. 175-6, distinguiremos entre sistemas de deducción *proposicional* y sistemas de deducción *argumental.* Unos y otros conllevan reglas o pautas de deducción. Ahora bien, las reglas deductivas de un sistema de deducción proposicional producen proposiciones o esquemas enunciativos a partir de proposiciones o esquemas enunciativos, mientras que las reglas de un sistema de deducción argumental tienen un comportamiento metadeductivo y producen argumentos o esquemas deductivos a partir de argumentos o esquemas deductivos. La deducción en sistemas del primer tipo es una serie de proposiciones que parte de unas premisas P y sufre las transformaciones permitidas por las reglas en P o en otras suposiciones subsidiarias hasta llegar a la conclusión Q. Una deducción en los sistemas del segundo tipo es una secuencia de argumentos o esquemas deducti-

vos, parte de un argumento o esquema dado y construye a partir de él nuevos argumentos o esquemas hasta conformar uno de la forma requerida. La reducción silogística prevista por Aristóteles respondía al método de los sistemas del primer tipo. La reducción estoica sigue, en cambio, un método mixto: puede funcionar como una variante de la deducción proposicional hecha en nombre de los modos indemostrados de Σ y puede tomar el camino de una deducción argumental a través de los *thémata* o principios rectores, cuyo estatuto lógico sería similar al de las reglas estructurales de los sistemas secuenciales L construidos por Gentzen (1934): *Untersuchungen über das Logische Schliessen*, iii. Por ejemplo, entendiendo las fórmulas del tipo de «$\Gamma \vdash \alpha$» como expresión de «α se deduce de Γ (en L)» el esquema siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

representa una de esas reglas estructurales de Gentzen, la regla denominada «de corte»; pues bien, cabe interpretar los thémata antes citados en segundo y tercer lugar como (meta)reglas de corte en el sentido de que permiten la supresión de alguno de los miembros asertivos de la secuencia deductiva, y esto es precisamente lo que significa el esquema indicado: dadas dos deducciones previas, una de «α» a partir de un conjunto de premisas Γ y otra de la proposición condicional «$\alpha \rightarrow \beta$» a partir de un conjunto de premisas Δ, hay así mismo una deducción de «β» a partir simplemente de ambos conjuntos de premisas.

Todo esto da aires de modernidad a la lógica estoica. Si nos los creemos y modernizamos a la par la silogística aristotélica, nos encontraremos con que una y otra constituyen respectivamente el precedente de nuestra lógica de conectores y el precedente de nuestra lógica de cuantificadores monádicos: los estoicos son los precursores de un estrato del análisis lógico elemental estándar, el proposicional, tal y como Aristóteles ya había sido el pionero del estrato complementario, el de los términos. Es una lástima que los antiguos no hubieran reparado en la obligada articulación entre el análisis lógico de los conectores de proposiciones y el análisis lógico de la cuantificación de términos. Es una lástima que se obcecaran en desarrollar por separado estas dos partes del tronco «natural» de la lógica. Menos mal que Frege vino al fin a poner las cosas en su sitio. Bueno, a pesar de la ironía con que me la estoy tomando, ésta ha sido una

lectura habitual de ambas contribuciones, la estoica y la aristotélica, en la historiografía moderna de la lógica a partir del trabajo clásico de Łukasiewicz (1934, 1935) sobre la historia de la lógica de proposiciones. Esta lectura supone, cuando menos, que las dos contribuciones, por su propia naturaleza lógica, son formalmente independientes de su contexto de origen y sólo tienen verdadero sentido dentro del contexto técnico que hoy ha alcanzado la disciplina de la lógica y define las maneras significativas de contribuir a su desarrollo. Pero esta interpretación ingenuamente retrospectiva no es justa ni adecuada en muchos de sus extremos, según ha ido mostrando el desarrollo actual de la crítica historiográfica en este campo de la lógica antigua: la verdad es que Aristóteles y Crisipo son demasiado suyos para ser de los nuestros —siquiera sea en proyecto—, para ejercer como una especie de padres o pioneros de las dos líneas constituyentes del análisis lógico que —se supone— surcarán la historia de la lógica hasta confluir y compenetrarse en la *Begriffsschrift* de Frege (1879) cumpliendo así su destino. Tal retroproyección incurre en un vicio de fondo, por no aludir a otros: en el uso sesgado y acrítico de una noción tan difusa como la de «significar una contribución al desarrollo de la lógica», cuyos signos y señales no pueden reducirse únicamente a las actuales señas de identidad (o de corrección) disciplinaria de nuestra lógica estándar postfregreana. Con todo, reconozco que tampoco es fácil evitar la tentación de dar un sentido gratificante y progresivo a la historia de la disciplina en la línea de su conformación presente. Pues, como confiesa Wagner a Fausto (I, esc. 1), «siempre es un gran placer el remontarse al espíritu de los tiempos pasados, ver cómo pensó un sabio antes que nosotros y cuánto le hemos adelantado nosotros en el mismo camino de investigación» [8].

---

[8] Valga como ilustración la visión retrospectiva del análisis lógico que ofrecen los Kneale (1961, 1968), o.c., VIII § 4, pp. 471-2, cuando se detienen a la altura de Frege para hacer un balance general de su significación en la historia de la lógica. *El desarrollo de la lógica* de los Kneale es el fruto más lúcido y logrado de la historiografía moderna que arranca de Łukasiewicz y deviene oficial por los años 1950-60. Me remito aquí a las referencias antes dadas en § 2 y nota (5) del capítulo 2 a propósito de la reconstrucción de la silogística aristotélica. También la reconstrucción de la lógica estoica ha dado lugar al enfrentamiento entre una historiografía tradicional (heredera de Prantl y de Zeller) y la historiografía moderna. Una contribución señera a ésta última es la de B. Mates (1961, 1973): *Lógica de los estoicos,* o.c. Otros puntos de vista, críticos de esta línea de reconstrucción en más de un respecto, son los de

3.4

Muchos seguidores tardíos de Aristóteles alimentaron la ilusión de que todo argumento válido era convalidable por medio de la silogística de los *Primeros Analíticos.* Desconocemos si algún estoico se hizo ilusiones parecidas sobre la capacidad del sistema Σ, aunque al parecer Crisipo tenía gran confianza en ella. Diógenes Laercio da a entender, por una parte, que los estoicos afirmaban que todo argumento (concluyente) se compone de silogismos básicos indemostrados (*Vitae,* VII 79) y es por ende reducible a los términos de Σ; por otra parte, informa de una distinción estoica entre dos clases de argumentos válidos (*Ibd.,* VII 78): los silogísticos, convalidables por medio del sistema Σ, y los meramente concluyentes, que eluden esta vía sistemática de convalidación. Cicerón también da un testimonio relativamente circunspecto al decir que los estoicos, a partir de sus modos indemostrados, generaban innumerables inferencias «que constituyen casi la dialéctica entera» (*Topica,* xi 57). El sistema estoico Σ admite, por lo menos, formas de argumentación positivamente excluidas por la silogística aristotélica. Una es la reducción al absurdo en los términos del esquema antes señalado («Si lo primero, lo segundo; si lo primero, no lo segundo; luego, no lo primero»). Otro caso digno de mención sería esta forma de argumentación apágogica: «Si lo primero, lo primero; si no lo primero, lo primero; luego, lo primero»; de ella conservamos aplicaciones notables en el curso de la pugna estoica por desembarazarse de parásitos escépticos: «Si hay una demostración, entonces hay una demostración: si no hay una demostración, entonces hay una demostración —pues hace falta una prueba concluyente para sentar que no hay demostraciones—; ahora bien, hay una demostración o no la hay; luego, hay una demostración» (*M* VIII 466). Este argumento, aparte de beneficiarse del truísmo lógico del tercero excluido, se funda en dos esquemas de aserción que los peripatéticos descartaban pertinazmente, el de la forma «si α, α» y el de la forma «si no α, α». Para empezar su gramaticabilidad lógica misma ya era sospechosa en me-

---

M. Mignucci (1967 [2]): *Il significatio della logica stoica,* o.c.; M. Frede (1974): *Die stoische Logik,* o.c.; J. Corcoran: «Remarks on stoic deduction», en Corcoran, ed. (1974): *Ancient Logic and Its Modern Interpretations,* o.c, pp. 169-181. Un informe general de la situación presente es el ofrecido por V. Celluprica (1980): «La logica stoica in alcune recenti interpretazioni», art. c.

dios aristotélicos; para colmo, en medios peripatéticos, cualquier autoimplicación pasaba por ser una trivialidad indigna de mención y, en fin, la silogística de los *Primeros Analíticos* se atenía al principio de que ninguna proposición puede en justicia implicar, o ser implicada por, su propia negación (vid. *APr.* II 4, 57b3-17). Esta generosidad formal del sistema estoico da pie para conjeturar una idea estructural de la relación de consecuencia lógica en Σ más amplia que la implícita en la silogística aristotélica. Esa idea admite la reflexividad de esta relación, amén de su asimetría y de su transitividad. En suma, el sistema Σ parece asumir al menos en principio un perfil de la relación de «seguirse lógicamente de» que hoy podríamos reconocer como clásico [9].

Sin embargo, la distinción antes citada entre los argumentos silogísticos, reducibles a esquemas de Σ, y los argumentos válidos sin más, sugiere ciertas limitaciones de ese criterio sistemático de convalidación. En particular, los estoicos juzgan que no se avienen a la condición canónica de silogismos los argumentos no metódicamente concluyentes *[amethódos peraínontes]* y los que revisten la forma de hiposilogismos *[hyposyllogistikoí]*. Los primeros se fundan en supuestos tácitos o implícitos que habría que declarar (Alejandro: *In An. Pr.* 22 5 ss., 24 1 ss., 68 29-31, 345 24 ss.). Algunos ejemplos tienen interés: «Lo primero es mayor que lo segundo; lo segundo es mayor que lo tercero; luego, lo primero es mayor que lo tercero» —fundado sobre el supuesto general: «Lo que es mayor que una cosa es mayor que cualquier otra cosa menor que aquélla»—; «A es igual a B; B es igual a Γ; luego, A es igual a Γ» —que omite el supuesto: «Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre

[9] Este perfil es el determinado por rasgos como los siguientes: reflexividad (α es una consecuencia —se sigue— de $\{\alpha\}$); asimetría (de que β sea una consecuencia de α no se sigue que α sea su vez una consecuencia de β); transitividad (si β es consecuencia de una consecuencia de α, β es asimismo consecuencia de α); monotonía (si β es una consecuencia de $\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$, β es consecuencia de $\{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$); finitud (si β es consecuencia de un conjunto cualquiera A de proposiciones $\{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$), es consecuencia de un subconjunto finito A' de este conjunto. La calificación de este modo de entender la relación de consecuencia lógica como «clásico» obedece a la frecuencia con que la idea de «seguirse lógicamente de» se ha empleado y precisado en tal sentido. Son propiedades recogidas por la definición normal de los conceptos de derivabilidad y deducibilidad; asimismo —salvo, en principio, la finitud— caracterizan el concepto normal paralelo de *consecuencia semántica* (el concepto «Bolzano-Tarski» de consecuencia). Por lo demás, estos rasgos de la relación clásica de consecuencia la distinguen de otras nociones más o menos afines, como la de *implicación* o la de *entrañamiento*.

sí»—. También pertenece a esta clase el argumento: «Dión dice que es de día; Dión dice la verdad; luego, es de día». Los argumentos hiposilogísticos son, por su parte, argumentos que contienen aserciones equivalentes a las que pueden figurar en un silogismo pero no revisten cabalmente la forma de un silogismo (Alejandro: *In An. Pr.* 84 12-16). No disponemos de muestras expresas, aunque suele considerarse un ejemplo de hiposilogismo el argumento: «β, se sigue de α; α; luego, β», habida cuenta de que «β se sigue de α» era para los estoicos equivalente a «si α, β» (Alejandro: *In An. Pr.*, 373 29-35).

Con arreglo a estas indicaciones, podemos concretar que A es un argumento susceptible de convalidación sistemática en Σ si y sólo si cumple las cuatro condiciones siguientes:

(i) A es lógicamente concluyente;
(ii) todos los supuestos determinantes de la conclusión de A constan expresamente como premisas de A;
(iii) tanto las premisas como la conclusión de A tienen una formulación canónica A′ en el lenguaje de Σ;
(iv) A′ es uno de los modos de Σ.

Es natural pensar que los estoicos podían tener constancia de la validez de los argumentos concluyentes no silogísticos merced al criterio asistemático de condicionalización. Pero en este punto nos encontramos con las ambigüedades inducidas por el debate en torno al condicional correcto o verdadero, en una situación de indeterminación que ya había sido denunciada por Sexto Empírico. No podemos precisar, por ejemplo, si los estoicos creían que el argumento no metódicamente concluyente ya citado «Dión dice que es de día; Dión dice la verdad; luego, es de día», u otros de forma análoga, eran convalidables por ese criterio asistemático; ni siquiera podemos dilucidar si los argumentos de una sola premisa, como «Respiras; luego, vives», no eran bien vistos entre los estoicos más ortodoxos por tratarse de argumentos no silogísticos —al violar la condición (ii)— o por tratarse de argumentos sustancialmente deficitarios y en definitiva no concluyentes. Para colmo de males, si nos atenemos a la versión crisípea del criterio, la más autorizada, entramos en nuevas dificultades. Esta versión conlleva, según es sabido, una connotación de pertinencia entre el antecedente y el consecuente del condicional correcto, entre las premisas y la conclusión del argumento así convalidado. Tal pertinencia sería menos fuerte que la aristotélica y podría reconocer relaciones de «seguirse de» descarta-

das por la silogística de los *Analíticos* —y por las lógicas más estrictas de la relación de *entailment,* e.g. el llamado «silogismo disyuntivo» que, al decir de Crisipo, los mismos perros asumen cuando en persecución de una presa llegan a una bifurcación del camino (*PH* I 69)—. Pero no sabemos si resulta tan débil y generosa que pueda admitir la noción amplia de consecuencia lógica que, al menos aparentemente, cuadra con el sistema Σ. Es de temer que no. Por ejemplo, nada indica que la relación de deducibilidad en Σ excluya la propiedad de monotonía o atenuación, aunque esta propiedad —a diferencia de la de corte— no aparezca directa o indirectamente señalada. Pero la monotonía o atenuación no se lleva bien con una condición de pertinencia; más aún, la idea de que los argumentos incoherentes y redundantes resultan inválidos, no concluyentes (*HP* II 146-7), equivale a excluirla. En suma, si la condicionalización se entendiera y practicara en los términos crisípeos, podría haber cierta tensión entre el planteamiento sistemático de la convalidación y el planteamiento asistemático; cuando menos los dos criterios vendrían a solaparse parcialmente sin que ninguno de ellos llegara a cubrir por entero el terreno confiado al otro.

3.5

No tenemos noticias de que los estoicos se plantearan cuestiones de este tipo. De lo que sí hay bastantes referencias es de la confrontación entre los peripatéticos y los estoicos en punto a los méritos y alcance respectivos de sus criterios sistemáticos: el silogismo aristotélico, el silogismo crisípeo. Los epígonos y comentadores aristotélicos, en particular, vieron la lógica estoica como un sistema rival en el campo de la convalidación de argumentos, y se aplicaron a mostrar cómo los silogismos estoicos, que ellos denominaban «hipotéticos», se podían reducir a los silogismos categóricos de Aristóteles. No parece que los estoicos se ocuparan de pagar con la misma moneda o siquiera de responder al reto. Por este motivo, entre otros, no es aconsejable interpretar la querella peripatética como el planteamiento de una cuestión de prioridad lógica en un sentido moderno: en el sentido de si la lógica de términos aristotélica es más básica y primordial que la lógica de proposiciones estoica o si, por el contrario, aquélla ha de fundarse en ésta. Una disputa de este género supondría la identificación de cada una de las partes en correspondencia con los estratos cuantificacional y conectivo —o «general» y

«primario»— del análisis lógico estándar, lo cual sería suponer demasiado como ya he señalado antes (al final de § 3.3) En todo caso, la vindicación peripatética de la superioridad de sus silogismos sistemáticos y su empeño por resolver en ellos los patrones estoicos trajo consigo una fusión gradual hasta la confusión de ambos. Esta confusión se inicia con la escolarización de la dialéctica en los curricula grecorromanos de los ss. II-IV y culmina a finales de la antigüedad clásica en la obra de un afanoso recolector-retransmisor como Boecio.

En el s. II de nuestra era, la visión de la situación todavía era relativamente lúcida y compleja, rica y diferenciada. Un buen testimonio es la *Introducción a la dialéctica* atribuida a Galeno. Sus conclusiones más salientes al respecto podrían ser estas dos: 1.ª, cada una de las dos lógicas sistemáticas, la silogística de los *Analíticos* y la silogística estoica, parecen tener un dominio propio o especializado de aplicación y en tal sentido los silogismos categóricos y los hipotéticos pueden deparar vías de demostración complementarias: 2.ª, pero hay asimismo variantes demostrativas que no se dejan reducir a uno u otro sistema.

Según este manual de lógica de Galeno, los silogismos categóricos están especializados en las demostraciones acerca de predicaciones generales que traigan a colación las categorías aristotélicas: cómo es algo, cuál es su magnitud, dónde se halla situado, etc. Así pues, se aplican preferentemente en geometría o en astronomía y, en general, a las investigaciones que conducen a asertos universales sobre los atributos de las cosas estudiadas (*Eisagogé*, xii-xiii). Los silogismos hipotéticos, en cambio, se usan en demostraciones que hacen referencia a cuestiones filosóficas o a objetos que no se manifiestan a la percepción sensorial; contribuyen a la dilucidación de problemas del tenor de «¿Hay un destino?», «¿Hay una providencia?», «¿Existen dioses?», «¿Existe el vacío?». Pero también son útiles en la resolución de cuestiones prácticas o de causas forenses. En pocas palabras, se mantienen fieles a sus raíces dialécticas (*Eis.*, xiv-xv). Pero unos y otros no son los únicos silogismos dignos de reconocimiento. «Hay también una tercera clase de silogismos útiles para las demostraciones, que yo considero que se producen conforme a la relación *[katà tò prós ti]*», dice el texto al principio del apartado xvi. Tienen una clara utilidad en matemáticas al operar con conceptos relacionales como «el doble que» o «la mitad que» y, en general, con razones o proporciones entre magnitudes. Un denominador común

de las demostraciones de este tipo particular es su fundamentación sobre axiomas y algunas de ellas discurren efectivamente —como decía Posidonio— con arrreglo a la fuerza de un axioma *[kat'axiómatos dýnamin]*. Galeno toma «axioma» en el sentido de proposición digna de crédito *[pístos lógos]* por sí misma y entre los asertos de esta clase incluye principios o nociones comunes como «las cosas iguales a una misma, son iguales entre sí» (i, 5) y verdades por definición (xvii, 8). Así pues, esta tercera clase está compuesta por silogismos que deben su cogencia a la fuerza de sus principios o a una elaboración teórica a partir de ellos —tal podría ser el caso de la teoría de las proporciones— (xvii-xviii). El texto aún menciona otra clase de silogismos, los llamados «proslépticos» (que proceden *katá próslepsin* [10]). Galeno no les concede especial atención al considerar que se reducen a los silogismos aristotélicos, vienen a ser silogismos categóricos enmascarados; tampoco le merecen particular interés las variantes estoicas de los hiposilogismos y los silogismos no metódicamente concluyentes. Todas estas formas de deducción le parecen residuales, superfluas y sobre todo inútiles a efectos demostrativos (xix).

La relativa lucidez de esta política distributiva de Galeno no sobrevivió a otros factores de distorsión y de confusión concurrentes, como la distancia que separaba cada vez más a la mayoría de los filósofos de las formas de argumentación usuales en otros campos de conocimiento (un distanciamiento que había empezado siglos antes con la separación entre la filosofía ateniense y la matemática alejandrina), o como la trivialización de la lógica y la dialéctica dentro de las tradiciones filosóficas mismas (e.g. la peripatética, la neoplatónica). Quizás los únicos ámbitos no filosóficos en los que por entonces halló la lógica una aplicación relativamente sostenida fueran las artes prácticas de la retórica y de la jurisprudencia —la retórica fue refugio de la dialéctica y el estudio de casos y de problemas jurídicos fue el medio de supervivencia que pudo encontrar el esmerado análisis lógico de los estoicos—. En todo caso, es notable el

---

[10] Teofrasto designaba así las proposiciones formadas por sustitución del término indeterminado en fórmulas como «aquéllo a lo que conviene universalmente B, también le conviene universalmente A». Vid. I. M. Bochénski: *La logique de Théophraste*, Fribourg, 1947; pp. 48-51. Entre los peripatéticos pasaron a denominarse «proslépticos» unos silogismos mixtos: silogismos categóricos que contaban con una premisa prosléptica.

empobrecimiento del legado antiguo de la lógica a la altura de su último albacea de los ss. V-VI, Boecio. Las pérdidas se hacen notar sobre todo en lo que concierne a la lógica de la demostración. La adopción del *Organon* aristotélico como parte del curriculum superior grecorromano ya no incluía en sus últimos tiempos la teoría del silogismo; hubo de ser el propio Boecio quien tratara de recordar la existencia de los *Primeros Analíticos.* Pero los *Segundos Analíticos* ni siquiera merecieron esta postrera muestra de atención. No podían merecerla en la medida en que la teoría de la demostración se había difuminado bajo una dialéctica genérica de la argumentación, de modo parecido a como los axiomas reconocidos por Galeno se habían desvanecido bajo la consideración de unas directrices genéricas de inferencia que incorporaban los tópicos dialécticos y retóricos (tanto los aristotélicos como los ciceronianos). Boecio, por ejemplo, entiende que toda argumentación debe su cogencia a la fuerza de un axioma —o «propositio maxima», por decirlo en sus términos—. Una «proposición máxima» consiste en una pauta inferencial que puede presidir cualquier tipo de argumentación (demostrativa, dialéctica, retórica, sofística), y puede tener la forma de un esquema hipotético «si..., entonces...» o descansar en relaciones metalingüísticas informales («ser predicado de», «ser del género de», «ser lo opuesto a») [11]. Así que la diferencia entre una prueba demostrativa

[11] La estructura de un argumento concluyente resulta entonces ésta: «axioma o proposición máxima, premisa(s) no axiomática(s) ∴ conclusión». Si la proposición máxima tiene forma condicional, las premisas ordinarias o no axiomáticas son aserciones que componen su antecedente y su consecuente no es otro que la conclusión. Un silogismo categórico, por ejemplo, no viene a ser entonces un tipo especial de deducción concluyente y sólo se distinguiría de otras formas válidas de deducción (e.g. de un esquema estoico) por la proposición máxima pertinente (si se tratara de un modo *Barbara,* por un axioma o proposición máxima de transitividad de la relación involucrada). Las restantes clases de inferencias, deductivas o no, presentan análoga estructura y, en su caso, la proposición máxima o axioma puede consistir en un *tópico* —en una directriz inferencial que carece de la entidad y de la necesidad propias de un axioma concluyente—. Es posible que esta generalización, ajena a la idea de axioma que se habían hecho Aristóteles, Posidonio o Galeno, provenga de una noción de *tópos* avanzada por Teofrasto (quien ya entiende los *Tópoi* como directrices genéricas que definen esquemas de relaciones susceptibles de aplicación a materias diversas, —frag. 38 de la edic. de A. Graeser, Berlin, 1973), y llegue a través de Temistio hasta Boecio, quien a su vez articula esta noción con la idea ciceroniana de «lugar común» *(locus):* el *locus* ciceroniano pasa a ser una clase o grupo de *tópoi* en el sentido indicado. Vid. S. Ebbesen: «Ancient scholastic logic as the source of medieval sholastic logic», c. III 4 de N. Kretzmann, A. Kenny, J. Pinborg, eds.: *The Cambridge*

y cualquier otra expresión de una inferencia plausible reside en el grado de evidencia y de necesidad interna de la proposición máxima correspondiente. Había nacido la tradición que iba a desarrollar la lógica demostrativa y la lógica inventiva como ramas del mismo tronco del arte de la dialéctica. En tiempos de confusión y de disolución siempre aparecen gérmenes de una nueva historia.

4. *Dimensión epistemológica.*

La dimensión cognoscitiva de los argumentos demostrativos tiene para los estoicos una importancia sustancial. Según Sexto Empírico, ellos mismos «dicen haberse embarcado en el arte de la dialéctica no simplemente en orden conocer qué es lo que se sigue de qué, sino especialmente en orden a saber cómo distinguir verdades y falsedades por medio de argumentos demostrativos» (*PH* II 247). Por si este deseo de discernimiento no fuera suficiente, los estoicos se encontraron con el aguijón suplementario de la crítica escéptica: ¿cómo puede uno asegurarse de que ha dado precisamente con la verdad? El estímulo externo del escepticismo venía así a unirse a las motivaciones internas del estoicismo —algunas generales y comunes, como el empirismo compartido por el pensamiento helenístico, otras propias y características del pensamiento estoico, como su materialismo «nominalista» y sobre todo el peculiar sesgo semiológico de

---

History of Later Medieval Philosophy (Cambridge, 1892, 1984 reimp.), pp. 101-127. Quizás el propio Galeno contribuyera indirectamente a esa generalización al afirmar en la *Introducción a la Dialéctica*, xvii 7, que «la mayor parte de las cosas que los hombres arguyen o demuestran se dicen conforme a la fuerza de un axioma». En todo caso, las proposiciones máximas son una trivialización del legado lógico y metodológico griego; de hecho, descartan el empleo de criterios sistemáticos de convalidación, y, por ende, la perspectiva de una posible teoría lógica. No deja de ser curioso encontrar ecos de este plateamiento en alguien como Ch. S. Peirce. Por ejemplo, en su (1867): «On the natural classification of arguments» asegura que toda inferencia entraña el juicio de que si las premisas son verdaderas, su conclusión ha de ser, o es probable que sea, verdadera; el principio implícito en este juicio se llama «principio rector» del argumento; un argumento válido o correcto es aquel cuyo principio rector es verdadero y éste determina la verdad necesaria o probable de su conclusión (vid. *Collected Papers of Ch. S. Peirce*, edic. de C. Harsthorne y P. Weis, vol. 2, pag. 284; declaraciones del mismo tenor aparecen en su (1880): «On the Algebra of Logic», *Ibd.*, vol. 3, pp. 104 ss.). Si dejamos de lado ciertas diferencias contextuales obvias, el principio rector de Peirce viene a cumplir la función de la proposición máxima de Boecio.

su teoría del conocimiento—, para constituir un telón de fondo que hacía resaltar el relieve de la dimensión epistemológica de la idea de demostración.

En esta constelación de motivos concurrían nuevos supuestos que daban a esta dimensión una presencia más notoria que la que ya tuviera en la idea aristotélica de *apódeixis*. Recordemos que el argumento demostrativo estoico se mueve en la dirección expresamente epistémica de una conclusión no obvia de suyo e incierta antes de convertirse en el objeto de la demostración. Por otra parte, la apódeixis estoica trata de ser un medio de adquisición de conocimiento mediante la justificación o la búsqueda de explicaciones. Y, en fin, acoge entre sus supuestos las proposiciones dotadas de una especie de evidencia originaria como la que deparan las aprehensiones o percepciones cognoscitivas inmediatas. Todos estos rasgos son novedosos con respecto a la concepción aristotélica anterior y cambian sensiblemente la significación epistemológica de la prueba deductiva. Aristóteles veía la demostración como una vía de mejorar el conocimiento en razón de su capacidad para restaurar el orden debido de inteligibilidad, cuyo sustrato es ontológico antes que epistémico; así pues, la demostración aristotélica era más bien un medio de reconstrucción y sistematización del conocimiento; la fuerza de sus principios no provenía de su presunta obviedad o su evidencia, sino de su inteligibilidad sustancial, su calidad discursiva o su dignidad metodológica. Se diría que el cambio de sentido introducido por el argumento demostrativo estoico, a la par que otras circunstancias —e.g. el peso de los problemas relacionados con los criterios de verdad donde quizás más se hace sentir el aguijón escéptico, la autonomía relativa de unas disciplinas nacientes (e.g. las matemáticas), el recogimiento de una filosofía que empieza a alimentarse de sus propias neuras—, vistos en una perspectiva histórica, constituyen fenómenos premonitorios: tienen visos de anunciar la separación moderna entre la filosofía de la ciencia y la teoría del conocimiento (de hecho los estoicos, al igual que los demás filósofos helenísticos, empiezan a preocuparse mucho más de las condiciones y categorías abstractas del conocer en general que de las formas científicas —paradigmáticas— de conocimiento). En esta perspectiva, algunos otros aspectos de la idea de demostración que se hacían los estoicos, singularmente su notable desinterés por la organización deductiva (o «axiomática») de un cuerpo de conocimientos, cobran una significación mayor que la que se les concede habitualmente.

4.1

De acuerdo con las ideas avanzadas por Zenón, el fundador de la Stoa, conocer algo es haberlo captado o aprehendido de modo que la aserción de que tal es el caso no puede ser refutada por un argumento (*SVF,* I 68). Este punto de vista no sólo nos sitúa una vez más en el marco dialéctico propio de las teorías griegas del conocimiento; también señala el peculiar compromiso estoico con la captación firme y segura de ciertas verdades, revela su confianza «dogmática» en el conocimiento verdadero (más adelante, en §5.1, habrá ocasión de precisar el sentido de este «dogmatismo»).

Una noción capital a estos efectos es la de aprehensión *[katálepsis],* entendida como un asentimiento a la presentación cognoscitiva de las cosas. La presentación cognoscitiva *[phantasía kataleptiké]* se distingue por consistir en una impresión recibida a partir de un objeto existente, siendo esta impresión de tal suerte que (a) es imposible que provenga de algo inexistente, (b) muestra o presenta ese objeto particular de manera que resulta inconfundible con cualquier otro objeto (*M* VII 248). Las presentaciones o manifestaciones de este tipo guardan cierta analogía con la luz: al igual que la luz nos permiten tanto cerciorarnos de ellas mismas, tomar conciencia de que se producen, como identificar aquello que iluminan; éste es el análisis etimológico de la palabra «phantasía», cuya formación Crisipo concibe emparentada con «phôs», «luz» (*SVF,* II 21.28). La presentación cognoscitiva de las cosas individuales, concretas y sensibles, depara la «base empírica» —digamos— de la teoría estoica del conocimiento. Es, por un lado, la fuente primordial de conocimiento: en ella tienen lugar tanto la percepción —i.e. la aceptación de sensaciones que provienen de objetos existentes y concretos—, como el reconocimiento del contenido perceptivo que se manifiesta en el asentimiento (Cicerón: *Acad. Post.* I 40-142; cf. *Acad. Pr.* II 145). Es, por otra parte, el criterio de verdad más firme y socorrido (Sexto Empírico, *M.* VII 152-3; Diógenes Laercio: *Vitae,* VII 54). Pero no representa la única instancia a este respecto. Por ejemplo, Diógenes Laercio, en el pasaje que acabo de mencionar, anota que Crisipo también admite como criterio la preconcepción *[prólepsis]:* aquéllo en virtud de lo cual los hablantes de un lenguaje entienden el signifacado comúnmente aceptado de una palabra de ese lenguaje; otros estoicos antiguos apelaban asimismo a la recta razón *[orthós lógos];* por añadidura, los estoicos se encuentran entre los filósofos helenís-

ticos que atribuyen un papel importante en este sentido al hombre sabio, el hombre que posee conocimiento y es norma del recto conocer y del obrar recto. La presentación cognoscitiva no sólo no es un criterio exclusivo; tampoco constituye una instancia de apelación clara e inequívoca; puede decantarse en un sentido subjetivo, de modo que prevalezca el asentimiento, o en un sentido objetivo que prime la captación franca del objeto aprehendido. Pero, sea como fuere, la presentación cognoscitiva parece conservar un estatuto relativamente privilegiado dentro de la teoría estoica del conocimiento. A la luz de lo que hoy sabemos sobre la historia del problema del conocimiento, podemos ver en ella uno de los primeros momentos de la confusión tradicional entre las cuestiones de origen del conocer y las cuestiones de acreditación del conocimiento, entre las fuentes de evidencia y los criterios de justificación, entre gnoseología y epistemología.

No hemos de olvidar una proyección capital de las aprehensiones genuinas, recordada en Diógenes Laercio (*Vitae*, VII 49): la impresión producida por un objeto particular abre el camino; entonces el pensamiento, que es capaz de hablar, expresa en el discurso lo que ha experimentado a resultas de la impresión. Esta proyección da lugar a lo que A. Long (1986 [2]: *Hellenistic Philosophy*, o.c., p. 124) llama «pensamiento articulado»: el pensar y el hablar son dos descripciones o dos aspectos de un proceso unitario de conocimiento en el que aparece una nueva dimensión, la constituida por el reconocimiento no ya de simples objetos sino de conexiones entre cosas y estados de cosas. Ahora es cuando la base empírica de los estoicos cobra pleno sentido como experiencia racional, i.e. como experiencia elaborada o interpretada discursivamente por medio del lenguaje. Un testimonio de Sexto Empírico puede aclarar más este punto. Los estoicos —refiere Sexto— dicen que el hombre se diferencia de los animales irracionales debido al lenguaje interno, no al habla externa, pues las cornejas, los loros y los arrendajos profieren sonidos articulados. El hombre tampoco se distingue de las demás criaturas por la recepción de meras impresiones —puesto que ellas también las reciben—, sino en virtud de unas impresiones creadas por inferencia y combinación. Lo cual representa la posesión por parte del hombre de una idea de conexión, y el hombre capta el concepto de signo gracias a este atributo. Pues el signo mismo reviste la forma: «si ésto, entonces aquéllo». Por consiguiente, la existencia del signo se sigue de la naturaleza misma del hombre, de su constitución específicamente humana (*M* VIII 275-6).

Estas referencias nos invitan a asomarnos a una construcción inferencial del conocimiento hecha al hilo de la conversión de la experiencia en un tejido de signos. Por decirlo en unos términos tomados de Epicteto (*Diss.* I 6.10), el caso es que el entendimiento está organizado de modo que no somos «receptores meramente pasivos de las impresiones que provienen de los objetos sensibles, sino que seleccionamos, abstraemos, añadimos, construimos y, desde luego, hacemos inferencias de unos objetos a otros cuando media entre ellos algún tipo de conexión». Esta actividad cognoscitiva inferencial descansa en nuestra disposición hermenéutica natural, en nuestra manera de tratar unas cosas como signos de otras y en nuestra manera de traducir el contenido de una impresión como un objeto de aserción. Así pues, nuestra actividad cognoscitiva inferencial comporta dos operaciones principales: la identificación de objetos que, a través de su versión asertiva, toma la forma de una proposición simple (una afirmación o una negación: «esto es <no es> así», «ocurre <no ocurre> tal cosa»); y la captación de conexiones entre las propiedades inherentes a una cosa o la aprehensión de relaciones entre estados de cosas, cuya traducción asertiva conduce a la formación de proposiciones compuestas (condicionales, conjunciones, disyunciones).

Si recordamos la forma inferencial paradigmática del concepto de signo será fácil apreciar el relieve del cometido epistemológico que toca desempeñar singularmente a la proposición condicional. En primer lugar, constituye el tipo de aserción más natural en el marco de la dialéctica ordinaria que discurre a partir de asunciones o supuestos ya sea con la intención de verificar un pronóstico o de corroborar una hipótesis, ya sea con el propósito de refutar tales suposiciones en razón de sus secuelas. En segundo lugar, parece ejercer como la forma canónica de las proposiciones estrictamente científicas según da a entender la actitud de Crisipo cuando estipula que los adivinos, a diferencia de los geómetras o de los médicos, deben renunciar a los nexos condicionales para formular sus augurios (a las formulaciones del tipo «Si alguien ha nacido bajo Sirio, no podrá ahogarse en el mar»), y limitarse a emplear composiciones conjuntivas, e.g.: «No: alguien ha nacido bajo Sirio y se ahogará en mar» (Cicerón: *De fato*, 15). A mayor abundamiento viene a ser condicional asimismo la forma cabal de una definición, según se desprende de una observación de Lúculo (*Acad.* II 21) a este respecto: la definición propia del hombre reza «Si es un hombre, es un animal mortal do-

tado de razón». Y no son éstas las únicas misiones significativas que la epistemología inferencial del signo podría encomendar a los condicionales; también cumplen otros cometidos importantes en orden a la determinación de las causas internas *[aitía syncktiká]* dentro del marco de la explicación causal: en este contexto, un condicional crisípeo puede especificar la índole de una conexión causal en los términos «si el *synektikón* de X es tal o cual, entonces X es (o hace) tal o cual cosa» [12].

En nuestros días, una teoría inferencial del conocimiento se considera como una alternativa a las teorías genealógicas del conocimiento, a las gnoseologías de cariz empirista o racionalista que suponen una fundación absoluta e inmediata del conocimiento verdadero, e.g. en la evidencia sensible o en la intuición intelectual respectivamente [13]. Una teoría inferencial del conocimiento juzga en cambio que esta empresa de remisión a unas fuentes primeras o últimas es una regresión infinita y descarriada: no se puede confiar simplemente en los sentidos o en las convicciones íntimas cuando se afirma algo con vistas a justificar alguna tesis interesante, pues cualquiera de los alegatos que pudiera parecer definitivo no es sino un elemento de juicio cuyo valor guarda relación con el peso que pueden tener los demás elementos de juicio disponibles. La pregunta por el valor de una noticia como conocimiento no plantea, en un contexto inferencial, una cuestión de fuentes de autoridad sino más bien una cuestión de justificación y de discernimiento. Si hay dudas acerca de la verdad de una afirmación, lo normal no es bucear en su procedencia —toda nueva creencia se infiere de otras creencias previas—, sino examinar sus títulos de crédito y contrastar sus implicaciones con el resto de la información pertinente. Así pues, no se trata de apelar a un punto fijo, a un criterio de verdad o a una marca de origen, pues la justificación del conocimiento, a diferencia

[12] Vid. Imbert (1978): «Théorie de la représentation et doctrine logique», en J. Bruschwig, ed.: *Les Stoïciens et leur logique*, o.c., pp. 223-249; (1980): «Stoic logic and alexandrian poetics», en M. Schofield, M. Burnyeat, J. Barnes, eds.: *Doubt and Dogmatism*, o.c., pp. 191-3 especialmente; M. Frede (1980): «The original notion of cause», *Ibd.*, pp. 246-7 en particular.

[13] Una crítica ejemplar de las fundaciones de este tipo es el ensayo de K. R. Popper (1960): «Sobre las fuentes del conocimiento y de la ignorancia», incluido en su (1962, 1965): *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires, 1967; pp. 9-40. Y una ilustración ejemplar de la teoría inferencial alternativa es el planteamiento seguido por Gilbert Harman: *Thought*. Princeton, 1973.

de su fundamentación, no es una operación lineal y cerrada de búsqueda de fundamentos, sino un proceso abierto de construcción y de confrontación de elementos de juicio; de la misma manera que el objeto de justificación no es una proposición o una representación aislada, sino un conjunto más o menos trabado de nociones y proposiciones. Por eso no es extraño que las teorías inferenciales suelan adoptar un punto de vista contextual y comprometerse con alguna suerte de holismo (lingüístico, epistémico, metodológico). Por lo demás, en el marco de una teoría inferencial, se entiende por inferencia un proceso intencional de razonamiento —de cualquier tipo que sea: deductivo, inductivo, analógico, práctico, etc.— por el que una persona modifica (parte de) sus creencias. La adquisición de conocimiento no es sino uno de los resultados posibles de este proceso, pues hay inferencia en la percepción, en la memoria, en la deliberación y en cualquier logro de nueva o mejor información; incluso hay inferencias inconscientes. Entre las virtudes de la inferencia como acción intencional figura la de permitir al agente hacerse cargo del sentido o de las consecuencias del trance por el que atraviesa o de la situación en que se encuentra: cualquier persona que quiera afrontar inteligentemente una situación habrá de recurrir a la inferencia, al menos siempre que esta situación se preste a diversas opciones o esté abierta a una interpretación. Es posible que la epistemología discursiva y semiológica de los estoicos tenga un sentido análogo y que, en general, su teoría del conocimiento venga a ser un intento de conciliar la existencia de fuentes y criterios de verdad con la existencia de signos. El intento puede tomar el aspecto de una integración de la primera en el contexto discursivo y hermenéutico de la segunda, donde los sentidos acomodan su viejo papel de fuentes de información a las nuevas exigencias del guión: «son —escribe Cicerón— intérpretes y mensajeros de las cosas» (*De nat. Deorum* II, LVI 140); donde el mundo se ofrece entretejido de señales o cosas manifiestas que remiten a otras cosas ocultas como sucedería con un texto a interpretar o, mejor aún, con un organismo vivo que hemos de conocer y tratar a través de unos síntomas. Afortunadamente —dirían en fin los estoicos— nos movemos en el seno de un lógos común, dentro de la racionalidad que compartimos al entendernos entre nosotros y con la naturaleza en un lenguaje articulado y significativo como el griego (este tema de una matriz cultural y lingüística común, ya sugerido por Platón —*Menón*, 82b: «¿Es griego y habla griego?»—, adquiere bastante importancia en el estoicis-

mo según revelan algunos puntos de su filosofía del conocimiento y del lenguaje, por ejemplo el papel que ésta atribuye a ciertas preconcepciones o supuestos culturales ordinarios).

Si esta interpretación «inferencialista» de la teoría estoica del conocimiento no parece infundada, tampoco faltan motivos para una interpretación opuesta, en la que los ingredientes inferenciales y semiológicos resultan más bien subsidiarios de una teoría de las fuentes y criterios de verdad. Es probable que las presiones escépticas tengan mucho que ver con algunos giros, cambios de acento y vacilaciones entre una epistemología inferencial y activa, relativamente libre, y una gnoseología coercitiva —por curioso que parezca el asentamiento de un escéptico a una apariencia inmediata resulta el más pasivo, limitado y compulsivo (*PH* I 193) de toda la filosofía helenística—. En todo caso, es difícil que un intento conciliador de esta suerte no se preste a ambigüedades y a equívocos. De hecho, al margen de la confusión ya apuntada entre las fuentes y las garantías del conocimiento, el uso estoico de sus diversos criterios de verdad no siempre está claro ni es consistente, e incluso su concepción de la verdad se resiente de ciertas oscuridades derivadas de la doble proyección de las presentaciones cognoscitivas. Por ejemplo, su proyección intencional y discursiva invitaría a pensar en una concepción de la verdad parecida a la que hoy defiende una teoría de la verdad como **coherencia,** mientras que su proyección objetiva apuntaría en la dirección opuesta de una teoría de la verdad como **correspondencia** [14]**.**

4.2

Ya tenemos noticias de cómo la argumentación demostrativa se beneficia de estos supuestos epistemológicos, en particular de la teoría inferencial del signo. En este contexto es perfectamente coherente esperar que la demostración propiamente dicha sea reveladora *[ek-*

---

[14] Vid. J. Annas (1980): «Truth and knowledge», en M. Schofield, M. Burnyeat y J. Barnes, eds., o.c., pp. 84-104. Naturalmente, todas estas alusiones a teorías modernas y contempóraneas del conocimiento inferencial y de la verdad sólo sirven para destacar problemas y tendencias apreciables en el pensamiento estoico, pero no significan, en absoluto, que uno crea que el estoicismo constituye una especie de antecedente histórico con el que hayan de guardar alguna relación de parentesco tales ideas o teorías.

kalyptón], manifieste a la luz de unas señales ciertas alguna verdad conexa anteriormente desconocida u oculta. La idea estoica de demostración adquiere así mayores visos heurísticos que los del silogismo científico de Aristóteles. Reparemos una vez más en los ejemplos característicos: «Si una mujer tiene leche en los pechos, ha concebido; esta mujer tiene leche en los pechos; luego, esta mujer ha concebido»; «Si fluye el sudor, hay poros imperceptibles en la piel; el sudor fluye; luego, hay poros impecerptibles en la piel». Parten de premisas cuya verdad nos consta, es manifiesta: la premisa mayor aduce una conexión conocida entre un antecedente y un consecuente, donde el primero es signo indicativo del segundo —e.g.: «el flujo del sudor es revelador de la existencia de poros debido a que conceptuamos de antemano *[dià tò proeilêpthai]* que un líquido no puede pasar a través de un cuerpo sólido» (*PH* II 142)—; la premisa menor aduce un fenómeno perceptible concreto. En otras palabras, la verdad de la premisa mayor descansa en una prenoción o preconcepción *[prólepsis]* discursiva —esta noción de prólepsis tiene raíz epicúrea y, como ya he sugerido, denota primordialmente algo en virtud de lo cual todos los usuarios de un lenguaje entienden el significado básico y comúnmente aceptado de ciertos términos (las nociones de «liquidez/solidez» siguiendo con el caso antes citado), y comprenden entonces el entramado conceptual que los relaciona y al que pertenecen; entre los estoicos, la preconcepción podía servir de base para la contrastación de opiniones sobre cuestiones generales y a juicio de Crisipo también era, como ya sabemos, un criterio de verdad suplementario de la evidencia empírica (Diógenes Laercio: *Vitae*, VII 54)—. La verdad de la premisa menor obedece justamente a una evidencia empírica concreta: por eso mismo esta premisa menor aduce unas condiciones particulares de aplicación o de instanciación de la conexión prevista en la premisa mayor. (Si leyéramos la premisa mayor como un condicional diodórico, generalizado, el argumento recordaría la pauta de explicación nomológico-deductiva que algunos filósofos actuales de ciencia, como K. Popper y C. G. Hempel, han popularizado; aunque esta lectura se vuelve problemática cuando interviene la idea de preconcepción.) Por último, la verdad de la proposición que aparece como conclusión del argumento no es evidente en sí misma o no lo era en un principio; pero se hace patente y queda de manifiesto en virtud de su relación con las premisas.

Esta construcción cognoscitiva del argumento demostrativo di-

fiere notablemente de la aristotélica. Tanto el silogismo estoico como el aristotélico pretenden dar la razón propia de que algo sea el caso y mejorar así nuestro conocimiento de las cosas —a tenor de una glosa de Alejandro (*In Top.* 10 5-6), éste es el uso primordial de todo argumento que merezca el título de «silogismo»—. Pero recordemos que el silogismo científico aristotélico es más bien una reconstrucción de lo ya sabido en el orden justo del conocimiento: las premisas adelantan la explicación cumplida de por qué algo es así y no puede ser de otra manera, y la demostración se remata con la descripción del caso explicado. En cambio, el silogismo estoico parece representar la búsqueda de una explicación, en parte oculta, del fenómeno considerado: la explicación sólo se torna cabal cuando se extrae la debida conclusión —pues ahora la conclusión no describe el fenómeno a explicar, sino que declara un factor de explicación concreto—. La «causa» de que esta mujer tenga leche en los pechos reside en su gravidez; parejamente, una condición de que el sudor fluya es la existencia de poros imperceptibles en la piel.

Las diferencias señaladas sugieren otras de mayor entidad filosófica. Una podría ser la que distingue el peculiar contexto inferencial y semiológico en que se mueve la demostración estoica, sobre el cual ya he insistido bastante. Pero conviene reiterarlo para obtener de él otras dos diferencias epistemológicas sustanciales entre el argumento demostrativo estoico y la demostración aristotélica. Una teoría del conocimiento como la estoica ve la realidad como un mundo complejo de manifestaciones y de síntomas, de cosas singulares y concretas que se presentan a sí mismas o remiten a otras cosas singulares y concretas. Así que, en primer lugar, es obvio que en el marco de esta teoría quedan descartadas las pretensiones de un conocimiento de lo universal —no hay universales— y las vías aristotélicas de captación, clasificación, abstracción. En segundo lugar, la explicación de las cosas a partir de signos o de síntomas también requiere una concepción de sus relaciones mutuas, incluidas las posibles conexiones causales, distinta del orden ontológico aristotélico. Olvidándose de la estructura jerárquica y de los factores causales intrínsecos que considera Aristóteles, los estoicos dan muestras de estar más interesados en determinar las conexiones de producción o de eficiencia, las condiciones concretas de la acción causal de unas cosas sobre otras y el orden regular de los acontecimientos. Aunque esta motivación primordial no les impide luego, al ocuparse de los factores causales que pueden intervenir en una explicación, discernir

aquéllos que son más congruentes con este planteamiento concreto de la acción causal como acción de un cuerpo sobre otro en determinadas condiciones: por ejemplo, distinguirían unas causas próximas o auxiliares *[aitía proegoúmena]*, unas condiciones antecedentes *[aitía prokatarktiká]*, unas causas internas *[aitía synektiká]*. A éstas últimas, determinantes de lo que algo es o de su modo de comportarse, se aplicarán selectivamente las fórmulas condicionales. La discriminación estoica de diversas clases de condiciones y causas se debe igualmente a motivos que poco tienen que ver con los aristotélicos. Por un lado, es posible que se hicieran eco de ciertas distinciones conocidas en la medicina de su tiempo: e.g. la distinción crisípea entre un factor provocador y una causa subsistente recuerda la distinción médica entre el estímulo externo que provoca ocasionalmente una infección o un acceso y la propia disposición natural del paciente que le hace más o menos sensible al contagio o a la enfermedad. Por otro lado, el problema de compaginar los supuestos del determinismo y del encadenamiento causal del destino *[heimarméne]* con el reconocimento de la autodeterminación y de la responsabilidad de la acción humana, obligan a Crisipo a un renovado esfuerzo de análisis de la determinación causal. La aguda percepción de este problema es una buena razón para atribuir a los estoicos la concepción primigenia de las ideas de necesidad natural (causal) y de continuidad física; concepción que anuncia, en el campo de la ética, la tradición que verá en la sabiduría y en la libertad el reconocimiento del destino y la asunción de la necesidad.

Seguramente varios de los aspectos de este planteamiento estoico de la casualidad —e.g.: el acento puesto sobre la causación eficiente o sobre la regularidad, la distinción entre las condiciones concurrentes y las causas determinantes— hacen que su análisis causal nos llegue a parecer más próximo y familiar que el aristotélico [15]. Con todo, el análisis estoico se resiente de una considerable pobreza de medios de expresión y de una pareja oscuridad conceptual, sobre todo a la hora de formular conexiones causales. Su repertorio de condicionales (diodórico, crisípeo) y de alternativas conjuntivas es harto limitado; reparemos, sin ir más lejos, en que su aproximación

---

[15] Vid. D. J. Allan (1965): «Casuality ancient and modern», l.c., pp. 1-18; M. Frede (1980): «The original notion of cause», en M. Schofield, M. Burnyeat y J. Barnes, eds., o.c., pp. 216-249; R. Sorabji (1980): «Causation, laws, and necessity», *ibd.*, pp. 250-282.

al concepto de ley o de regularidad natural —ligada a un profundo presentimiento del orden antes que a un análisis mecánico o dinámico de los procesos naturales—, no contempla en absoluto el uso de alguna especie de condicionales contrafácticos [16]. El punto más llamativo es, sin embargo, otro que guarda una relación directa con la versión de las explicaciones causales en términos de argumentos demostrativos: consiste en el sentido amplio y un tanto confuso —hoy diríamos entre lógico y no lógico— en que un consecuente está conectado con, y puede seguirse de, un antecedente. Esto es a nuestros ojos, acostumbrados a distinguir la necesidad lógica o racional de la necesidad física o natural, señal de confusión entre dos dimensiones distintas de nuestras reconstrucciones teóricas del orden del mundo. Pero quizás no fuera para los estoicos sino un corolario natural de su peculiar concepción de un mundo material y corpóreo no sólo gobernado sino penetrado por el Lógos, de manera que tanto su encadenamiento causal como su unidad y su continuidad físicas son correlatos de la actividad y la presencia materiales, mundanas, del propio Lógos. Es posible que, en la larga historia de la filosofía natural, sólo Spinoza haya concebido un holismo materialista tan compacto como este panlogismo estoico.

5. *La crítica escéptica.*

De lo que hemos visto se desprende que el planteamiento estoico de la demostración no sólo puede propiciar algunos desarrollos interesantes de los usos cognoscitivos y explicativos de este tipo de argumentación, sino que además envuelve ciertas dificultades y puede generar algunos problemas característicos. El más notable estriba, como ya sabemos, en la índole un tanto ambigua de la conexión entre un antecedente y un consecuente. Dicha conexión puede con-

---

[16] La prótasis de los condicionales de este género resulta falsa de hecho pero puede enunciar una condición del cumplimiento de una conexión regular o causal —remitiendo quizás a un supuesto nomológico— y puede tener así un significado predictivo —e.g. «si hubiera echado este terrón de azúcar en el agua, se habría disuelto»—. Un contrafáctico es irreducible a un condicional filónico o a una extensión conservadora estándar del condicional filónico. Tampoco cabe interpretar la muestra de condicional correcto que aduce Diodoro, «Si no hay elementos atómicos de las cosas, entonces hay elementos atómicos de las cosas», como un contrafáctico propiamente dicho aunque parta de un antecedente que Diodoro considera falso.

sistir en una especie de regularidad universal «empírica» —según un sentido que cabría dar al condicional diodórico— o puede incluir un nexo más fuerte, conceptual o «lógico» —como el que parece inherente al condicional crisípeo—. Por otra parte, el condicional verdadero o correcto puede expresar una relación de implicación material entre prótasis y apódosis, o una relación semiológica y causal de inferencia entre los hechos referidos por una y otra en una premisa de esa forma, o una relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión de un argumento. Lo cierto es que no siempre estas opciones quedan claras, que tal vez no sean excluyentes o disjuntas entre sí —como lo serían para nosotros—, y que la índole precisa de la conexión viene a ser un punto crítico para las pretensiones demostrativas, cognoscitivas y explicativas, del silogismo estoico. Abrir la herida en este punto es un mérito de los adversarios escépticos del estoicismo, Sexto Empírico en particular.

Hoy, retrospectivamente, podemos estimar que la discusión de asuntos como ése y otros derivados fue una curiosa contribución del propio escepticismo —una contribución irónica e involuntaria— a la idea griega de demostración. En este sentido, el legado griego en su conjunto no sólo envuelve un núcleo positivo del concepto clásico de demostración (e.g. la idea de que la demostración establece que algo es necesariamente el caso, la idea de que a través de una prueba de este tipo uno puede cerciorarse de la efectividad de tal conocimiento), sino también su posible reverso crítico o negativo. Otra cosa es que la contrapartida escéptica del silogismo, este trasfondo oscuro del legado griego de la idea de demostración, sólo haya conocido una historia esporádica y menor que contrasta con la brillante y duradera fortuna filosófica del silogismo apodíctico mismo; su suerte ha corrido parejas con la historia «guadiana» de Sexto Empírico en el seno del pensamiento occidental; su contenido crítico apenas se ha dejado sentir como una amenaza frontal al silogismo clásico hasta que reaparece el punto de si este tipo de prueba es o no es una inferencia propiamente dicha (depara o no un conocimiento), y si tiene o no tiene valor demostrativo (si es o no una petición de principio), bajo una nueva formulación y en el nuevo contexto del empirismo británico de mediados del siglo pasado. Con todo y con eso, a pesar de que su incidencia fuera por lo regular más virtual que efectiva, este complemento subversivo no es una parte desdeñable de la antigua herencia que los griegos nos dejaron sobre la demostración.

La verdad es que desde Aristóteles hasta Galeno, durante seis siglos largos de desarrollo, la idea griega de demostración se vio acompañada de discusiones acerca de su naturaleza o su significación, y aún acerca de sus condiciones de viabilidad. Puede incluso que ni la práctica misma de la demostración de los *Elementos* euclídeos, por más que constituyera un paradigma de la prueba deductiva en la matemática helenística, se viera libre de toda sospecha; hay noticias de que el estoico Posidonio se creyó obligado a defender a Euclides de los ataques dirigidos contra los *Elementos* por Zenón de Sidón, un epicúreo de la segunda mitad del s. II a.n.e.; también sabemos de ciertas discrepancias sobre cuestiones de método en matemáticas, pero estas discusiones tienden a mejorar las pruebas antes que a descartarlas. En todo caso, las dudas y las reservas escépticas que nos han llegado tienen otro cariz: obedecen sustancialmente a cuestiones de principio, son cosa de filósofos y tienen que ver con la filosofía de la demostración antes que con la práctica matemática, pongamos por caso. La crítica escéptica de la demostración estoica, en particular, consiste en objeciones dialécticas suscitadas por las asunciones mismas del contrario y hace referencia a un marco de discusión general: al enfrentamiento filosófico radical que han de mantener un escéptico y un dogmático. De ahí que el punto de la demostración no resulte un motivo primordial de confrontación, sino una cuestión derivada de los presupuestos epistemológicos dados. Aun así el debate al respecto devino sumamente significativo, gracias sobre todo a la intervención de Sexto Empírico, y hasta cierto punto —como luego veremos— premonitorio. También es cierto, en fin, que alguna de las batallas de esta contienda se libró sobre un terreno no filosófico y por cuestiones más específicas de método: en el campo de la teoría y la práctica de la medicina; es de suponer que esta experiencia concreta dialéctica y médica de algunos escépticos, de los autodenominados «pirrónicos» en especial, contribuyera a afinar sus armas y a agudizar sus observaciones críticas.

5.1

Como acabo de señalar, las críticas más frecuentes de la idea de demostración son secuelas de una confrontación entre filósofos dogmáticos —ante todo estoicos— y filósofos escépticos que se desarrolla sobre el sustrato empirista común de la epistemología helenís-

tica. De modo que no estará de más considerar brevemente el sentido del enfrentamiento entre el *dogma* y la *sképsis* en este contexto [17]. «Dogma» significa creencia en general, pero aquí denota más específicamente el asentimiento a algo que no es, o trasciende, la apariencia de lo que se presenta directamente a los sentidos. Es dogmatismo asumir la existencia real de algo o declarar la verdadera naturaleza de las cosas —pues todo esto queda más allá de lo que se nos muestra por fuerza como una sensación evidente—. Por ejemplo, la miel se presenta con un sabor dulce: esta apariencia es evidente para todo el mundo y en este punto convienen dogmáticos y escépticos. El desacuerdo empieza cuando unos, los dogmáticos, aseguran además que la miel es efectivamente dulce o que hay realmente cosas (como la miel) dulces, mientras que los otros, los escépticos, se resisten a darlo por seguro y a afirmarlo. En palabras de Sexto Empírico: «Nadie discute, supongo, sobre la manera de presentarse un objeto; lo que se inquiere es si este objeto es tal como se presenta» (*PH* I 22). La «sképsis» es precisamente una actitud constante de examen e investigación, y el escepticismo no es una doctrina sino más bien el conjunto de contrapartidas críticas que van precipitando los sucesivos compromisos dogmáticos. El dogma y la sképsis están emparentados, y no sólo dialécticamente. La concepción griega de la verdad como descubrimiento y declaración de lo real bajo las apariencias es una vieja raíz de la que se nutren ambas posturas: una, la dogmática, hace de la verdad un objeto de asentimiento; otra, la escéptica, se alimenta del hiato previo entre lo que hay o puede haber y lo que se nos presenta o aparece.

Las actividades escépticas ante la dificultad —o imposibilidad— de salvar el abismo abierto entre las apariencias o manifestaciones sensibles y la realidad misma o absoluta pueden ser más o menos radicales, más o menos lúcidas y coherentes. Volvamos una vez más a Sexto Empírico para hacernos una idea justa y comprensiva de la cuestión. Al comienzo de su introducción al escepticismo *Pirrhóneioi Hipotipóseis*, Sexto informa: «De entre los que abordan las investigaciones filosóficas, unos dicen que han descubierto la verdad,

[17] Para más detalles sobre esta confrontación y sus derivaciones, vid. las recientes compilaciones de artículos a cargo de M. Schofield, Burnyeat y J. Barnes (1980): *Doubt and Dogmatism*, y de M. Burnyeat (1983): *The Skeptical Tradition*. También es instructivo J. Annas y J. Barnes (1985): *The Modes of Scepticism. Ancient Texts and Modern Interpretations*.

otros niegan la posibilidad de capturarla y otros continúan aún sus indagaciones. Los que se llaman propiamente «dogmáticos» (tales como los aristotélicos, los epicúreos y los estoicos, entre otros) creen haber dado con la verdad; Clitómaco, Carnéades y otros filósofos académicos han dicho que la verdad no puede alcanzarse; y los escépticos persisten aún en sus investigaciones» (*PH* I 4) [18]. Así pues, no es extraño que un foco central de la discusión entre los dogmáticos y sus críticos sea la existencia de criterios de verdad. Pero naturalmente la idea de demostración, la idea de un argumento capaz de establecer que algo es efectivamente el caso, tampoco puede salir indemne de ese enfrentamiento. El precipitado de la tradición escéptica se puede resumir en dos observaciones al respecto: **a/** no hay una argumentación que constituya una prueba concluyente —una demostración en el sentido previsto por los lógicos dogmáticos—; **b/** aunque la hubiera, carecería de utilidad en orden a un conocimiento sustantivo de la realidad.

5.2

Ahora bien, la confrontación entre dogmáticos y escépticos en el punto de la demostración ¿no es la infección gangrenosa de una vieja

---

[18] Es difícil precisar las diferencias entre el escepticismo de la Academia platónica, a partir de Arcesilao, y el escepticismo adoptado por los «pirrónicos» tras la ruptura de Aenesidemo con el escepticismo académico a principios del s. I a.n.e. Quizás sea plausible una caracterización de acuerdo con los rasgos siguientes. Por lo que se refiere a los académicos: (1) desarrollo de la tradición dialéctica de la oposición de proposiciones: para todo hay razones de igual peso a favor y en contra; (2) por lo tanto, *akatalepsía:* nada puede ser conocido —de aquí nacen posiblemente el lema presuntamente socrático del «sólo sé que no sé nada» y sus paradójicas secuelas teóricas y prácticas; (3) aun así cabe el recurso a lo persuasivo y probable *[píthanon]* o a lo razonable y conforme a la condición humana *[eúlogon]* —noción tomada por Carnéades quizás de los estoicos. Por lo que se refiere a los pirrónicos: (1) *isostheneîa:* oposición y contrapeso entre las apariencias o los modos de presentarse las cosas; (2) no cabe mantener una creencia a menos de tener garantías de su verdad —premisa seguramente tomada de los propios dogmáticos—; (3) luego, *epokhé:* suspensión de juicio sobre la naturaleza real del fenómeno presentado, y *ataraxía:* vida sin creencias y sin compromisos como los asumidos por las diversas doctrinas dogmáticas. Vid. M. Burnyeat (1980): «Can the sceptic live his scepticism?», en M. Schofield, M. Burnyeat y J. Barnes, eds., o.c., pp. 20-53; G. Striker (1980): «Sceptical strategies», *Ibd.*, pp. 54-83; J. Barnes: «The beliefs of a pyrrhonist», *Elenchos,* 4 (1984), pp. 5-43; M. Frede: «The skeptic's beliefs», en sus (1987): *Essays in Ancient Philosophy,* o.c., pp. 179-200.

herida, la exasperación de un problema abierto? ¿No procede de algunos presocráticos la idea de la distinción entre las apariencias y la realidad? ¿No hay antes del empirismo helenístico huellas de una disposición escéptica? Y, sobre todo, ¿no habrían madrugado más algunos críticos del s. IV a.n.e. al alumbrar los primeros recelos en el mismo marco en que emergía la idea de demostración? [19]

Recordemos que Aristóteles ya se había visto envuelto en un temprano debate sobre la índole y la viabilidad de la demostración. Fue en la Academia platónica o en sus aledaños donde la deducción concluyente conoció las primeras amenazas: la de generar una regresión indefinida o la de incurrir en una prueba circular, si quería justificar sus pretensiones demostrativas. Aristóteles se creyó entonces obligado a aclarar que no toda proposición es demostrable. Esta escaramuza inicial puede atribuirse a la confusión y a la inmadurez de un medio que asistía, sin apenas preparación lógica y epistemológica, el nacimiento del concepto de *apódeixis;* era un medio acostumbrado a la controversia y a la refutación dialéctica que, de pronto, se encontraba ante la idea de una prueba deductiva directa de que algo es tal como se dice y no puede ser de otra manera. De ahí que sus dudas no nos parezcan el fruto de unas tomas de posición conscientemente debeladoras de este tipo de prueba. Ni la actitud de Aristóteles es, por otra parte, la de quien se ve inmerso en una discusión con unos interlocutores escépticos. (Por ejemplo, las referencias del libro Γ de la *Metafísica* a unos presuntos negadores de los principios de no contradicción o de tercero excluido suenan como el recurso a una especie de contrafigura dialéctica —un papel similar

[19] Suelen considerarse fuentes remotas del escepticismo a Jenófanes (entre 580 y 470 a.n.e.): «No hay ni habrá un hombre que haya conocido lo patente o haya visto cuantas cosas digo acerca de los dioses y de todo. Pues aunque llegara a expresar lo mejor posible algo acabado, ni él mismo lo sabría; en cambio, a todos les ha sido asignada la conjetura» (21 B 34); a Demócrito: «En realidad, nada conocemos; pues la verdad yace en lo profundo» (68 B 117); a Ekfanto: «no cabe lograr el conocimiento verdadero de las cosas, sino sólo definirlas como creemos que son» (51 B 1). Vid. W. K. C. Guthrie (1962): *Historia de la filosofía griega. I* (Madrid, 1984), pp. 372-376. Jenófanes y Demócrito son «autoridades» a las que se remite habitualmente la tradición escéptica helenística y sus declaraciones pueden resultar un tanto sesgadas por esta misma tradición —no faltaron intentos de beneficiarse de Sócrates y del propio Platón en ese mismo sentido—. Por otra parte, incluso el papel «dogmático» de Aristóteles puede ser hoy un motivo de discusión: confróntese la interpretación que doy a continuación con la de J. Barnes: «An Aristotelian way with Scepticism», en M. Matthen, ed.: *Aristotle Today* (Edmonton, 1987), pp. 51-76.

cumple el «ateo» en los argumentos medievales sobre la existencia de Dios—, antes que como citas o alusiones a personas identificables.) El escepticismo aún no se deja sentir como tal en el s. IV a.n.e.: Pirrón pasa inadvertido; tampoco llama mucho la atención un seguidor de Demócrito, Metrodoro de Khíos, que inicia un tratado *Perì phýseos* con la sentencia: «Ninguno de nosotros sabe nada, ni siquiera si sabe algo o no» —y luego avanza una especulación cosmológica sobre la suposición de que existen los átomos y el vacío—. En resumen, la actitud de Aristóteles es la de quien viene a desbrozar, aclarar y definir una vía segura de exposición razonada del conocimiento; no es la de quien ha de velar por la legitimidad de este procedimiento o ha de afrontar objeciones de principio contra sus supuestos lógicos o epistemológicos.

Más tarde los estoicos también harán gala de una firme y serena confianza en el poder de la razón. Pero su situación ya no será la misma que aquella, un tanto sorprendida e ingenua, de la que había gozado Aristóteles; van a medirse con un medio filosófico mucho más crítico y agresivo. En él no sólo afloran las reservas de otras escuelas helenísticas de pensamiento hacia la capacidad de las pruebas deductivas para trascender los datos empíricos, sino que comienza a formarse la tradición escéptica, hidra de varias cunas y cabezas, que también se alimenta en parte del propio dogmatismo de la Stoa antigua. Desde la dialéctica escéptica que empieza a cundir en la Academia platónica (a partir de Arcesilao) en el transcurso del s. III a.n.e., y a través de la sabiduría crítica que van adquiriendo los «pirrónicos» (algunos de ellos familiarizados con las disputas tradicionales entre las escuelas médicas sobre las posibilidades y límites respectivos de las teorías especulativas, los métodos de diagnóstico y las técnicas de observación), el bando escéptico va afilando sus armas hasta alcanzar la finura de un Sexto Empírico, en torno al año 200 de nuestra era.

Los primeros escépticos aún oponían al conocimiento demostrado unas referencias genéricas a los viejos tópicos de la circularidad, el regreso indefinido, la falta de un criterio para sentar principios indemostrables. Alegaban, por ejemplo, que una demostración, en su papel de signo revelador o indicativo, ha de probar algo sensible o algo inteligible por medio de una razón o argumento, i.e. por medio de algo inteligible; pero esta instancia inteligible ha de probarse a su vez: si se prueba por una instancia sensible se incurre en circularidad, y si se prueba por otras instancias de su misma índole

inteligible, se genera un proceso indefinido de prueba que sólo cabe detener arbitrariamente. Los pirrónicos empiezan a sistematizar (a partir de Aenesidemo, s. I a.n.e.) los famosos *trópoi*, los tópicos o patrones dialécticos del escepticismo [20], pero también derivan hacia la demostración cargos tan generales que podrían aplicarse a cualquier tipo de justificación del conocimiento, sin caer en la cuenta de la especial capacidad de la demostración para cuidarse de sí misma. Su objeción principal es cómo saber si lo que se nos presenta como una prueba deductiva es una demostración verdaderamente concluyente o no. Pero este reparo, aunque sea plausible ante otras pretensiones de conocimiento, descansa en una equivocación. Aristóteles ya había advertido que no cabe pedir una demostración de que la *apódeixis* es demostrativa, pues el argumento demostrativo se presenta como tal a sí mismo, no requiere más títulos de acreditación que su propia cogencia lógica y epistémica, tiene la virtud de ser

[20] Vid. los textos y comentarios de J. Annas, J. Barnes (1985): *The Modes of Scepticism*, o.c. Estos *trópoi* hacen referencia a las disparidades existentes entre el hombre y los demás animales, entre los humanos mismos, entre las diversas percepciones sensoriales; a las que obedecen a las circunstancias, lugares y posiciones, mezclas, cantidades, al cáracter relativo de cualquier apreciación; a las discrepancias que sugen de lo común y de lo extraño; a las variaciones derivadas de usos y costumbres o los sesgos introducidos por creencias y convicciones. Por lo demás, la enumeración y la clasificación de estas referencias también son variables en las principales fuentes al respecto (Sexto Empírico, Diógenes Laercio, Filón de Alejandría). Cabría, no obstante, una especie de esquema general de la argumentación escéptica en este sentido. La función primordial de los *trópoi* es mostrar o producir oposiciones entre las apariencias o manifestaciones de las cosas, que conduzcan a la suspensión del juicio sobre su naturaleza real o genuina. Sobre este supuesto, las referencias de Sexto Empírico (*PH* I 35-39) se podrían reducir a este patrón general:

a) X se presenta como el fenómeno P en el caso C.
b) X se presenta como el fenómeno P* en el caso C*.
c) Ahora bien, P y P* son apariencias incompatibles que tienen lugar en situaciones C y C* diferentes (e.g.: X actúa como un remedio saludable en las circunstancias C —en la cantidad tal, para este paciente, etc.—, mientras que resulta un veneno letal en unas circunstancias C* distintas).

La eficacia de esta pauta de argumentación descansa, por un lado, en la distinción tradicional entre la realidad de las cosas y sus apariencias objetivas —este escepticismo antiguo no hace referencias a unas apariencias subjetivas o a «lo que me parece», sino a «lo que se (nos) presenta» o «se manifiesta»—; y, por otro lado, en la atribución de un peso equivalente a las condiciones o situaciones en que pueden manifestarse los fenómenos —es en este plano de las condiciones concurrentes en el que un escéptico antiguo colocaría los pareceres o las opiniones sobre el fenómeno en cuestión.

epistemonikós (*APo.* I 2, 71b17-19): reconocemos una demostración cuando la vemos. La objeción pirrónica podría haber tenido más punta crítica si se hubiera dirigido hacia otro lado, si hubiera querido significar que de la *validez* de un argumento concluyente no se sigue necesariamente la *aceptación* de su conclusión. En una prueba deductiva válida, las premisas implican la conclusión y la verdad de las premisas es un criterio suficiente para la verdad de la conclusión. Pero la asunción de esas premisas no implica la aceptación de esta conclusión, ni la validez lógica de la prueba es fuerza suficiente a este respecto. Dicho en otras palabras: no hay «regla de inferencia», tal como el Modus Ponens por ejemplo, que nos obligue en tanto que agentes inferenciales a asumir por fuerza o por necesidad una conclusión tras haber convenido en las premisas; racionalmente podemos, aunque no sea posible en estricta lógica, creer en P y que P implica Q, sin creer asimismo que Q. Sin embargo, no hay el menor indicio de que la crítica pirrónica se moviera en esta dirección, en la línea de una distinción entre los aspectos lógicos y los aspectos inferenciales o intencionales de la deducción [21]. La crítica de un escéptico veterano como Sexto Empírico parece, en fin, más sustancial y precisa. No obedece sólo a las reiteradas cuestiones de principio sino también a los problemas suscitados por el desarrollo metódico de ciertas *téknai*, en particular la dialéctica y la medicina. Pero sobre todo apunta al corazón mismo de la idea clásica de demostración: a la creencia en que se corresponden entre sí la fuerza lógica de una deducción concluyente y su rendimiento cognoscitivo. La crítica de Sexto Empírico se puede cifrar en este reto: el silogismo, si es lógicamente válido, habrá de renunciar a sus pretensiones demostrativas; pues cuando no sea redundante será falso.

Hoy quizás podemos entrever en esta observación corrosiva del escepticismo maduro el germen de cuestiones que nos son familiares

[21] La verdad es que se trata de una distinción que no se ha llegado a apreciar hasta hace poco —posiblemente empieza a dejarse ver en la ingeniosa fábula de Lewis Carroll (1895): «Lo que la tortuga le dijo a Aquiles» (incluida en la edic. de A. Deaño: Lewis Carroll: *El juego de la lógica*, Madrid, 1972, reimp. post., pp. 153-157). Incluso hoy en día, pasando por lo regular inadvertida, sigue provocando bastantes equívocos. Hay unas acotaciones críticas oportunas en H. Margain: «Validez, inferencia e implicaturas», recogido en su póstumo: *Racionalidad, lenguaje y filosofía* (México, 1978), pp. 94 y ss. en especial; para una consideración detenida de las ingratas secuelas de esa indistinción, vid. mis «Inferencia, argumentación y lógica», *Contextos*, III/6 (1985), pp. 47-72, y *El análisis lógico: nociones y problemas. I.* (Madrid, 1987) B, cc. 1-2, pp. 33-58.

desde el s. XIX. Una ha merecido el nombre de «paradoja de la inferencia» y la otra se ha hecho popular en los términos de J. Stuart Mill como la acusación de que el silogismo tradicional constituye una petición de principio [22]. La llamada «paradoja de la inferencia» se puede concretar en unos términos parecidos a estos: si la conclusión de una inferencia deductiva no está contenida en sus premisas, la inferencia no puede ser válida; y si esa conclusión no dice algo distinto de lo dicho por ellas, la inferencia carece de utilidad; pero la conclusión no puede estar contenida en las premisas y ser al mismo tiempo novedosa; por consiguiente, las inferencias deductivas no pueden ser a la vez lógicamente válidas y cognoscitivamente provechosas. La acusación de petición de principio al silogismo categórico tradicional puede obedecer a un motivo análogo si lo que se trata de sentar ya viene adelantado en las premisas. Las dos cuestiones se refieren entonces al problema de conciliar la validez analítica de la deducción con sus servicios cognoscitivos y sus pretensiones informativas. Pero lo cierto es que pueden generar toda una madeja de problemas. Envuelven, por un lado, el punto de las consecuencias ignoradas u ocultas —posiblemente infinitas— que podrían seguirse de una proposición o de un conjunto de proposiciones conocidas; punto que guarda relación con alguna teoría del significado (e.g.: con precisiones acerca de la metáfora del «contenido»: ¿en qué sentido cabe entender que la conclusión de una deducción válida se halla «contenida» en sus premisas?) Otro punto involucrado es la cuestión pragmática o metodológica que plantea el hecho de reconocer una implicación —la existencia de tal relación de consecuencia a través de un proceso de deducción adecuado y efectivo. También se halla incluida la cuestión epistemológica de cómo acceder por esta vía «apodíctica» a nuevas verdades o a nuevos conocimientos, cuestión que puede retrotraernos al punto mencionado anteriormente de

---

[22] Una presentación elemental de ambas puede verse en manuales como el ya citado de S. Stebbing (1943): *Introducción a la lógica moderna*, o el de M. Cohen y E. Nagel (1947): *Introducción a la lógica y al método científico*, Buenos Aires, 1968; I, ix, pp. 203-212. Muestras distintas de un replanteamiento más reciente de las controvertidas relaciones entre la deducción y la producción de conocimiento pueden ser M. A. E. Dummett: *The Justification of Deduction (Proceedings of the British Academy*, v. LIX), London, 1973; J. Hintikka (1973): *Lógica, juegos de lenguaje e información* (Madrid, 1976), c. X, pp. 256 ss. Hintikka habla a este respecto de un «escándalo de la deducción» tan inquietante como el ya familiar escándalo de la inducción.

la distinción entre la implicación semántica —que comporta una necesidad lógica— y la inferencia deductiva —a la que podemos atribuir virtudes informativas—. La cuestión epistemológica es la que ha tenido mayor audiencia filosófica. Pero no sólo en el escepticismo antiguo sino también en la refundición moderna de la crítica del silogismo (e.g. en el influyente planteamiento de Stuart Mill (1843: *System of Logic,* II, c. iii), muchas de estas cuestiones, si no todas, suelen estar más que entrelazadas, confundidas.

5.3

A juicio de Sexto Empírico cabe formular de entrada un cargo general contra las demostraciones que procedan en los términos canónicos de un silogismo, sea en los términos de uno de los modos indemostrados del sistema estoico o sea en los términos de uno de los silogismos perfectos de los peripatéticos. Es el cargo de redundancia (*PH* II 156-167). Hemos de recordar que, según *PH* II 147 (o *M* VIII 435), los estoicos consideran no concluyentes los argumentos redundantes y entienden que una argumentación deviene redundante cuando aduce una premisa innecesaria para extraer la conclusión debida. La acusación, de estar justificada, tiene repercusión tanto en el plano lógico de la demostración como en el plano epistemológico. Si, como suponen los estoicos, los argumentos redundantes son un tipo de argumentación no concluyente, los argumentos que incurran en este vicio padecerán una letal debilidad lógica. Y si, como sugiere Sexto Empírico, de esto adolecen los argumentos que presentan la forma de los esquemas básicos o primordiales, el mal se extenderá a cualquier deducción presuntamente convalidable por este procedimiento dentro del sistema. Pero la demostración estoica también se hace acreedora a otros dos cargos que guardan relación directa con sus pretensiones cognoscitivas. Supongamos que, en el mejor de los casos, una deducción logra sortear el riesgo de redundancia. Ello sólo es posible, arguye Sexto Empírico, cuando esa deducción viola alguna de las condiciones necesarias para admitir que un argumento válido constituye asimismo una demostración propiamente dicha. O bien incumple el requisito de que el argumento sea verdadero, violando la condición de que haya constancia de la verdad de todas y cada una de las premisas aducidas (*M* VIII 441-2); o bien incumple el requisito de que el argumento resulte informati-

vo, violando la condición de que sean unas proposiciones previamente conocidas las que signifiquen e impliquen otra proposición cuya verdad nos era desconocida (*PH* II 159). Estas observaciones, tomadas conjuntamente, amenazan el núcleo de la idea clásica de demostración: la convicción de que una demostración no sólo nos da a conocer que algo es el caso sino que nos hace tomar conciencia de que lo sabemos.

Consideremos, por ejemplo, una muestra trivial de argumento cortado por el patrón del primer indemostrable estoico: «Si es de día, hay luz; es de día; luego, hay luz». La crítica de *PH* II 159 es de este tenor: o está claro que «hay luz» se sigue de «es de día», antecedente del condicional «si es de día, hay luz», o no está claro. Conforme al requisito de que la demostración ha de partir de premisas manifiestas o conocidas, siendo una de ellas este condicional, está claro que «hay luz» se sigue de «es de día»; por ende, la misma conclusión se obtendría con una deducción de la forma «es de día; luego, hay luz»; así pues, el condicional «si es de día, hay luz» es una premisa redundante, el argumento original peca de redundancia. Ahora bien, si para evitar esto suponemos que no está claro que «hay luz» se siga de «es de día», ya no podremos mantener que las premisas sean patentes o conocidas pues, por lo menos, el condicional «si es de día, hay luz» no lo es. La crítica de *M* VIII 441-2 es similar: o el que haya luz se sigue de que sea de día, o no. Si se sigue, nos encontraremos con la verdad del condicional «si es de día, hay luz» pero también con una premisa redundante. Si no se sigue, el condicional evita la redundancia pero al precio de ser una premisa falsa, revés que da igualmente al traste con la intención demostrativa del argumento. He ahí, pues, un silogismo estoico que no puede satisfacer a la vez los requisitos de orden lógico y de orden epistemológico que debería cumplir para alcanzar el estatuto de argumento demostrativo. En conclusión, o no hay en absoluto demostraciones genuinas o la conceptualización estoica de este tipo de argumentos es inconsistente. Si quisiéramos ser más justos que Sexto Empírico, no diríamos tanto. Cuando β se sigue de α y un sujeto epistémico S sabe que α, sólo cabe concluir que S ya sabe que β si S es un sujeto omnisciente y vive en un mundo epistémicamente transparente cuyos habitantes pueden extraer todas y cada una de las consecuencias lógicas de aquello que saben o creen conocer en un determinado momento. Pero no hay motivos para atribuir a los estoicos esa suposición de omnisciencia —pese a idealizar la figura del

sabio—, ni a su mundo esta perfección epistémica —a pesar de hallarse impregnado de Lógos—. Aunque, por muy justos que seamos, tampoco podremos dejar de reconocer que la conceptualización estoica es oscura y se presta a equívocos como el que trata de explotar Sexto Empírico.

Otra circunstancia curiosa es el empeño en hacer de la redundancia una tara de carácter lógico, el vicio determinante de una clase de argumentos no concluyentes. A nuestros ojos se trataría más bien de un punto de elegancia deductiva. Pues es obvio que los argumentos redundantes preservan la validez de la deducción: sus premisas no pueden ser verdaderas a menos que lo sea igualmente la conclusión. Sin embargo, es cosa bien distinta argüir en favor de la verdad de una conclusión aduciendo como elementos de juicio un conjunto de consideraciones de las que ella misma forma parte. La redundancia incide ahora sobre las expectativas cognoscitivas que hemos puesto en una prueba fallida, una prueba que supone cuanto ha de probar. En todo caso, la redundancia significa un fiasco metodológico que poco tiene que ver con la validez lógica del argumento. Pero ésta es otra buena ocasión para recordar que el silogismo, aristotélico y estoico, constituía un modelo de argumentación cogente y demostrativa e incluso explicativa, antes que un canon meramente formal de validez. Así que prestemos más atención a la idea de redundancia que subyace en el fondo de la cuestión.

La noción estoica es relativamente vaga y ambigua. Con todo aventuremos ciertas precisiones. Sea A un argumento de la forma $< \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}, \beta >$, i.e. un par ordenado compuesto por un conjunto finito de premisas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ y una conclusión β. Diremos que A es redundante si alguna de sus premias, α_i, es redundante; α_i viene a ser redundante si su presencia o ausencia es indiferente para la deducibilidad efectiva de β en A. De acuerdo con este criterio —del que se hace eco el análisis medieval de las falacias [23]—, la exclusión de premisas redudantes u ociosas equivale a la exigencia de que todas y cada una de las premisas de un argumento concluyente sean pertinentes. Ya hemos visto que la pertinencia es un rasgo compartido —aunque de forma y en grados diferentes— por el nexo silogístico aristotélico y por la conexión *[synártesis]* crisípea entre el anteceden-

[23] Vid. *Fallacie Vindobonenses*, XII 117vb, en L. M. de Rijk: *Logica Modernorum*. I (Assen, 1962); pp. 539-540.

te y el consecuente del condicional correcto. Bajo esta interpretación, la redundancia de un argumento A = $< \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}, \beta >$ viene provocada por la inclusión de una premisa α_i no pertinente para la conclusión β, de modo que A no se adecua estrictamente al criterio crisípeo de implicación lógica. Desde otro punto de vista, la redundancia de A radica en contener una premisa α_i, que no oficia como signo indicativo de B, de modo que A contraviene la significación cognoscitiva estipulada para una demostración propiamente dicha. Es claro entonces que la validez lógica ha de correr parejas con el rendimiento cognoscitivo que se espera de una premisa concluyente. De ahí la doble repercusión, lógica y epistemológica, que puede representar el cargo de redundancia en este contexto.

Cabe imaginar algunas salidas del trance de redundancia, todas ellas disponibles de algún modo para los estoicos. Una, bastante sencilla, podría ser aceptar en determinados casos los argumentos de una sola premisa *[monolémmatoi lógoi]* defendidos por Antípater de Tarso a mediados del s. II a.n.e. contra la tradición de la Stoa antigua; argumentos del tenor de «Es de día; luego, hay luz», «Respiras; luego, vives». Pero esta opción, sin mayores precisiones, no resolvería el problema de la significación cognoscitiva y, para la mayoría de los estoicos, podría llevar en ocasiones del Scila de la redundancia al Caribdis de la deficiencia, del peligro de incluir premisas redundantes al riesgo de caer en entimemas o deducciones incompletas. Otra salida, más razonable en principio, sería distinguir entre el condicional constitutivo de la premisa mayor y la implicación que vincula antecedente y consecuente, de modo que la verdad del primero nunca se confundiera con la validez de la segunda. Esta solución nos devuelve a una distinción básica entre las regularidades naturales o conexiones «materiales» y los nexos lógicos. Pero tampoco está claro que los estoicos aceptaran plenamente esta sugerencia, al menos en razón de su Lógos universal, uniforme y providente.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

A

Annas, J., Barnes, J., eds.: *The Modes of Scepticism. Ancient Textes and Modern Interpretations.* Cambridge, 1985.

Alejandro de Afrodisia: *In Aristotelis analyticorum priorum librum I commentarium* (edic. de M. Wallies. *Commentaria in Aristotelem Graeca,* vol. II, pars I). Berlin, 1883.

Arnim, H. von, ed.: *Stoicorum Veterum Fragmenta.* Leipzig, 1903-1924, 4 vols; Stuttgart, 1964 reimp.

Diógenes Laercio: *Lives of Eminent Philosophers* (edic. de R. D. Hicks). London/New York, 1925, 2 vols.

Galeno: *Institutio Logica* (edic. de C. Kalbfleisch). Leipzig, 1986.

Galeno: *Iniciación a la dialéctica.* (Edic, biblingüe; introd. de M. Otero) México, 1982.

Hülser, K., ed.: *Die Fragmente zur Dialektik der Stoiker.* Konstanz, 1981.

Kieffer, S., ed.: *Galen's Institutio Logica.* Baltimore, 1964.

Philodemus: *On Methods of Inference [De signis]* (edic. de P. H. De Lacy y E. A. De Lacy). Napoli, 1978 (edic. rev. con la colaboración de M. Gigante).

Sexto Empírico: *Opera* (edic. de R. G. Bury). London/Cambridge (Mass.), 1933-1949, 4 vols. (el 1.º contiene *PH;* el 2.º, *M* VII-VIII; el 3.º, *M* IX-X; el 4.º, *M* I-IV; en los pasajes de interés lógico y cuando sea

posible conviene confrontar su versión inglesa con la de los textos seleccionados por B. Mates (1961 [2], 1973): *Lógica de los estoicos*, edic. c., pp. 159-215).

B.

Barnes, J., Brunschwig, J., Burnyeat, M., Schofield, M., eds.: *Science and Sepeculation. Studies in Hellenistic Theory and Practice.* Cambridge/Paris, 1982.

Brunschwig, J., ed.: *Les Stoïciens et leur logique.* Paris, 1978.

Burnyeat, M., ed.: *The Skeptical Tradition.* Berkeley/London, 1983.

Colish, M. L.: *The Stoic Tradition from Antiquity to the Early Middle Ages.* Leiden, 1985, 2 vols.

Corcoran, J., ed.: *Ancient Logic and Its Modern Interpretations.* Dordrecht/Boston, 1974.

Giannantoni, G., ed.: *Lo scetticismo antico.* Napoli, 1981, 2 vols.

Kneale, W. y M. (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica,* Madrid, 1972; c. III, pp. 107-167.

Long, A. A.., ed.: *Problems in Stoicism.* London, 1971.

Long, A. A.: *Hellenistic Philosophy.* London, 1974, 1986 [2].

Rist, J. M.: *Stoic Philosophy.* Cambridge, 1969, 1980, reimp.

Rist, J. M., ed.: *The Stoics.* Berkeley/London, 1978.

Schofield, M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds.: *Doubt and Dogmatism.* Oxford, 1980.

C.

Adorno, F.: «Sesto Empirico: metodologia delle scienze e "scetticismo" come metodo», en G. Giannantoni, ed. (1981), o.c., t. II, pp. 449-485.

Allan, D. J.: «Casuality ancient and modern», *Proceeding of the Aristotelian Society,* suppl. vol. 39 (1965), pp. 1-18.

Annas, J.: «Truth and knowledge», en Schofield, M., Burnyeat, M., Barnes, J. eds. (1980), o.c., pp. 84-104.

Barnes, J.: «Proof destroyed», en Schofield, M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds. (1980), o.c., pp. 161-104.

Brunschwig, J.: «Proof defined», en Schofield, M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds. (1980), o.c., pp. 125-160.

Burnyeat, M.: «The origins of non-deductive inference», en J. Barnes, J. Brunschwig, M. Burnyeat, M. Schofield, eds. (1982), o.c., pp. 193-238.

Celluprica, V.: «La logica stoica in alcune recenti interpretazioni», *Elenchos,* 1 (1980), pp. 123-150.

Corcoran, J. : «Remarks on stoic deduction», en J. Corcoran, ed. (1974), o.c., pp. 169-181.

Ebbert, Th.: «The origin of the Stoic theory of signs in Sextus Empiricus», *Oxford Studies in Ancient Philosophy,* V. Oxford, 1987; pp. 83-136.
Edelstein, L.: «Recent trends in the interpretation of ancient science». *Journal of the History of Ideas,* 13 (1952), pp. 573-604.
Egli, U.: *Zur stoischen Dialektik.* Basel, 1967.
Frede, M.: *Die stoische Logik.* Göttingen, 1974.
Frede, M.: «Stoic vs. Aristotelian Syllogistic», *Archiv für Geschichte der Philosophie,* 56 (1974), pp. 1-32; incluido en Frede (1987): *Essays...*
Frede, M.: «The original notion of cause», en Schofield, M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds. (1980), pp. 217-149; incluido en Frede (1987): *Essays...*
Frede, M.: «Philosophy and medicine in antiquity», en Frede (1987), o.c., pp. 225-242.
Frede, M.: «On Galen's epistemology», en Frede (1987), o.c., pp. 279-298.
Frede, M.: *Essays in Ancient Philosophy.* Oxford, 1987.
Giannantoni, G.: «Su alcuni problemi circa i rapporti tra scienza e filosofia nell'età ellenistica», en Giannantoni, G., Vegetti, M., eds.: *La scienza ellenistica,* Napoli, 1984; pp. 41-71.
Gould, J. B.: «Chrysippus: on the criteria for the truth of a conditional proposition», *Phronesis,* 12 (1967), pp. 152-161.
Gould, J.B.: *The Philosophy of Chrysippus.* Leiden, 1971.
Gould, J. B.: «Deduction in stoic logic», en J. Corcoran ed. (1974), o.c., pp. 151-168.
Imbert, C.: «Théorie de la représentation et doctrine logique», en Brunschwig, J., ed. (1978), o.c., pp. 251-272.
Imbert, C.: «Stoic logic and alexandrian poetics», en Schofield, M., Buryeat, M., Barnes, J., eds. (1980), o.c., pp. 182-216.
Kahn, Ch. H.: «Stoic logic and stoic Logos», *Archiv für Geschichte der Philosophie,* 51 (1969), pp. 158-172.
Kidd, I. G.: «Posidonius and logic», en Brunschwig, J., ed. (1978), o.c., pp. 273-283.
Mates, B. (1953; 1961 [2], 1973): *Lógica de los estoicos.* Madrid, 1985.
Mignucci, M.: *Il significato della Logica stoica.* Bologna, 1965.
Mueller, I.: «Stoic and peripatetic logic», *Archiv für Geschichte der Philosophie,* 51 (1969), pp. 173-187.
Müller, I. von: *Ueber Galens werk vom wissenschaftlichen Beweis.* München, 1895.
Nasti de Vicentis, M.: «Logica scettica e implicazione stoica», en G. Giannantoni, ed. (1981), o.c., t. II, pp. 503-532.
Rist, J. M.: «Zeno and the origins of stoic logic», en Brunschwig, J., ed. (1978), o.c, pp. 387-400.
Sedley, D.: «Diodorus Cronus and Hellenistic Philosophy», *Proceedings of the Cambridge Philological Society,* 203 [N. S. 23] (1977), pp. 74-120.
Sedley, D.: «On signs», en J. Barnes, J, Brunschwig, M. Burnyeat, M. Schofield, eds. (1982), *Science and Speculation,* o.c. pp. 239-272.

Sorabji, R.: «Causation laws, and necessity», en Schofiel, M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds. (1980), o.c., pp. 250-282.

Stopper, M. R.: «Schizzi pirroniani», *Phronesis*, 28 (1983), pp. 265-297.

Striker, G.: «Sceptical strategies», en Schofield. M., Burnyeat, M., Barnes, J., eds. (1980), o.c., pp. 54-83.

Sullivan, M. W.: *Apuleian Logic.* Amsterdam, 1967.

Verbeke, G.: «La philosophie du signe chez les stoïciens», en Brunschwig, J. ed. (1978), pp. 401-424.

White, M. J.: «The four account of conditionals in Sextus Empiricus», *History and Philosophy of Logic*, 7/1 (1986), pp. 1-14.

Capítulo 4
EUCLIDES Y LA PRÁCTICA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA.

1. *La tradición de la prueba matemática.*

Hemos conjeturado que una confluencia feliz de considerandos filosóficos, recursos dialécticos e investigaciones matemáticas, y un medio propicio para su comunicación mutua y su desarrollo conjunto como la Academia platónica de la primera mitad del s. IV a.n.e., fueron la matriz en que llegó a gestarse la idea griega de demostración. También hemos visto que algunos filósofos no se limitaron a tomar conciencia de este singular tipo de argumentación, sino que además avanzaron teorías acerca de lo que podía y debía ser la deducción concluyente. A Aristóteles, en particular, corresponde el honor de haber abierto esta perspectiva teórica sobre la *apódeixis* al analizar sus supuestos lógicos, su significación cognoscitiva, sus pretensiones explicativas e incluso sus servicios metódicos en orden a la exposición sistemática de los cuerpos de conocimiento científico (demostrado). Los estoicos merecen asimismo reconocimiento por haber suministrado otra vía de reconstrucción lógica y epistemológica del *lógos apodeiktikós*. El escepticismo, en fin, vino a recordar la existencia de los problemas críticos que acompañan al concepto de prueba concluyente como, en general, las sombras de

la duda acompañan a las luces del conocimiento. De este modo el pensamiento especulativo griego invitaba a confiar, de la mano de Aristóteles, en el sueño programático de la razón que teje con silogismos cuerpos de conocimiento y, de la mano de los estoicos, en el sueño dogmático de la razón intérprete de signos inferenciales y de relaciones consecutivas, sin que por otra parte sus vigilias escépticas dejaran de advertir algunas de las dificultades de este soñar despierto. ¿Qué más se puede pedir a esta fundación filosófica de la idea de demostración? Sin embargo, el legado griego en su conjunto es todavía más rico y más complejo.

Al margen de estas líneas de elaboración teórica y crítica de la idea de demostración, los griegos no se privaron de la experiencia de una larga y sostenida práctica de la deducción concluyente en los diversos dominios de las matemáticas.

En vista de la relativa pero apreciable independencia con que llegaron a desenvolverse por un lado el análisis lógico y filosófico de la *apódeixis*, y por otro las pruebas matemáticas, no estará de más distinguir entre las que vengo llamando «**teorías** griegas de la demostración» y las que voy a llamar «**prácticas** griegas de la prueba». Del lado de la teoría caen las luces lógicas y epistemológicas que aportaron Aristóteles y los estoicos y, en general, las contribuciones que ya hemos considerado. Del lado de la práctica estará el rigor informal de los argumentos que los griegos reconocieron como auténticas pruebas matemáticas (geométricas, en especial) ya en tiempos de Platón pero más aún a partir de los *Elementos* de Euclides y de la matemática alejandrina del s. III a.n.e. Este rigor práctico es el que ahora toca considerar.

La distinción entre «teorías» y «prácticas» no implica de entrada una demarcación disciplinaria o una compartimentación estanca entre la teoría filosófica y la práctica matemática. Ni siquiera prejuzga la existencia o no de diferencias sustanciales entre ellas. Ya habrá ocasión de compararlas para dilucidar sus relaciones de aproximación y de distanciamiento. La distinción tampoco quiere dar a entender que sólo se practicaran pruebas concluyentes en matemáticas, nunca en filosofía. El uso generalizado de la reducción al absurdo basta, sin ir más lejos, para deshacer ese posible malentendido. La verdad es que tal distinción pretende simplemente explotar el desarrollo de la tradición de las pruebas matemáticas para que luego podamos pronunciarnos con cierto conocimiento de causa sobre esas dos hijuelas del legado griego que han tenido una suerte histórica

efectivamente diferenciada: la **teoría** de la *apódeixis* o del *lógos apodeiktikós* y la **práctica** de las pruebas geométricas consagrada por los *Elementos* de Euclides.

De acuerdo con este propósito empezaré considerando el desarrollo de la tradición de la deducción matemática preeuclídea. Esta consideración puede hacese desde tres puntos de vista no enteramente desligados entre sí. El más inmediato y superficial es el que mira hacia la serie de *Elementos* o tratados matemáticos elementales que, según el sumario eudemiano de Proclo, se remonta al atribuido a Hipócrates de Khíos (cuya *akmé* se sitúa hacia el 430 a.n.e.). Otro más significativo contempla la evolución de los métodos de prueba que se deja ver en dos maneras de plantearse las cuestiones matemáticas, como problemas a resolver o como teoremas a demostrar. El tercer punto de vista tiene mayor interés aún pues dice relación a unos motivos o aspectos internos del desarrollo de la prueba matemática: a la generalización y abstracción del marco conceptual así como al creciente rigor informal de la deducción que van apareciendo en el estudio de las magnitudes inconmensurables; son tendencias que culminarán en una teoría general de la proporción, como la de Eudoxo o la del libro V de los *Elementos* de Euclides, y en el uso de un «método de exhausción», como el aplicado en el teorema X 1 y en el libro XII de este mismo tratado o como el logrado por el talento de Arquímedes quizás en la estela de otras prácticas preeuclídeas (tal vez del propio Eudoxo).

1.1 La composición de Elementos

«En geometría —asegura Aristóteles— es bueno ejercitarse en lo que se refiere a los elementos» (*Top.* VIII 14, 163b23). Por Proclo sabemos que solía llamarse «elementos *[stoikheîa]*» a ciertas proposiciones que desempeñaban un cometido capital en la obtención o en la organización deductiva de otros muchos resultados (*In I Euclidis Elementorum librum Commentarii,* 72 ss.).

También se distinguía, al menos desde Menaekhmo, entre un sentido más amplio y otro más restringido de tal denominación. Conforme al primero, todo aquéllo que sirve de medio para obtener o establecer otra cosa puede considerarse *elemento* de este resultado; bajo esta acepción son elementos los lemas asumidos, los teoremas probados y los problemas resueltos cuando se utilizan en la prueba

de nuevos teoremas o en la solución de problemas ulteriores; e.g., en los *Elementos* de Euclides la construcción previa de un triángulo equilátero (libro I, proposición 1) puede considerarse elemento de la obtención de una recta igual a otra recta dada (I, prop. 2). Al hablar de «elementos» en este sentido genérico nos estamos refiriendo a una propiedad clásica de la deducción, su carácter acumulativo, y a una virtud general de cualquier proposición establecida, su capacidad para servir como escalón para alcanzar y sentar alguna otra proposición dentro de un núcleo deductivo. En cambio, el título de «elemento» en un sentido más restringido se reserva para un grupo selecto de proposiciones: las que tienen un estatuto similar o próximo al de los principios *[arkhaí]*; así, una definición o un postulado constituye un elemento de los teoremas que se derivan de ellos. Proclo añade que este significado más estricto es el que cuadra a los elementos que se hallan compilados en el tratado de Euclides.

Supongamos una cadena deductiva de la forma siguiente: $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \rightarrow <\beta_i \rightarrow \beta_k \rightarrow \ldots \rightarrow \gamma_n>>$, donde las proposiciones de tipo α son verdades primeras, *arkhaí;* las proposiciones de tipo β son resultados conocidos y la proposición de tipo γ es la conclusión que se acaba de establecer. En la medida en que β_j, β_k ..., funcionan como lemas o como pasos deductivos que llevan directamente a la obtención de γ_n, cumplen una función de elementos en el primer sentido amplio o genérico. Ahora bien, si β_j, β_k ..., han sido a su vez derivados o probados a partir de unos primeros principios α_1, α_2, ..., entonces también hay elementos en el sentido segundo, más estricto: pero éstos no son las proposiciones de tipo β, sino las proposiciones de tipo α, de las que asimismo se deriva indirectamente, a través de β_i, β_k ..., la conclusión final γ_n. En este segundo caso, la cadena completa puede formar un orden parcial de deducción como el que caracteriza a una teoría deductiva más o menos axiomatizada. En cambio en el primer caso, cuando nos atenemos a β_j, β_k ... como resultados capitales para la obtención de γ_n, —al margen de si revisten o no el carácter de pasos intermedios derivados de unas proposiciones iniciales de tipo α—, nos movemos en el ámbito más limitado de lo que llamaré un «núcleo» deductivo. Los dos casos evidencian las virtudes transitivas de la deducción y su capacidad para ir acumulando nuevos resultados, γ_{n+1} ..., sobre la base de los ya conocidos. Pero la introducción expresa de los principios α_1, α_2 ..., no sólo completa y ordena el núcleo $<\beta_j \rightarrow \beta_k \rightarrow \ldots \rightarrow \gamma_n \rightarrow \gamma_{n+1} \rightarrow \ldots>$ dentro de un cuerpo deductivo de conocimientos, sino que

puede poner de manifiesto el carácter conservador de la deducción al mostrar cómo esa introducción no altera en absoluto el núcleo deductivo que viene a subsumir ni, en general, ningún núcleo que se preste a una subsunción parecida.

Los *Elementos* de Euclides, según es bien sabido, coronan una tradición de tratados elementales matemáticos que recogen y desarrollan especialmente elementos de geometría; son tratados hoy desaparecidos. A tenor del resumen historiográfico de Eudemo que nos facilita Proclo (*In I Eucl. Comm.*, 65 ss.), Hipócrates de Khíos pasa por ser el primer autor de un tratado de este género. Posteriormente León, algo mayor que Eudoxo pero más joven que Platón, compuso otro con mayor atención al número de los elementos y a su empleo en las pruebas; también es interesante anotar que se aplicó a la investigación de diorismos, i.e. condiciones de solubilidad de los problemas. Theudio de Magnesia, en fin, confeccionó unos *Elementos* que mejoraban el orden deductivo de exposición y daban forma general a resultados que sólo tenían hasta entonces un alcance particular; fue seguramente un manual que circuló en el seno de la Academia platónica. Proclo no menciona ningún otro tratado anterior a los *Elementos* de Euclides, aunque sí cita a un tal Hermótimo de Colofón que «descubrió muchos de los elementos». No estamos en condiciones de saber si la orientación que preside esta tradición de los *Elementos* preeuclídeos responde al sentido amplio del término (a una conciencia genérica del proceder escalonado y acumulativo que sigue la deducción de nuevos resultados por medio de algún otro conocido), o responde a su sentido más restringido (lo cual supone la designación de una base deductiva general de principios, definiciones o postulados geométricos). Como ya he sugerido, la alternativa tiene interés. Pues la confección de *Elementos* en el primer sentido puede simplemente descansar en una selección de proposiciones o resultados capitales dentro de un núcleo deductivo particular presidido por el problema o la serie de problemas que se trata de resolver; mientras que la confección de *Elementos* en el segundo sentido podría indicar también una predisposición «axiomatiforme» hacia teorías deductivas generales, actitud que culmina en la «axiomatización» de Euclides. Ciertas alusiones de Platón al método de hipótesis de los geómetras (*Menón*, 86e-87a; *Fedón*, 100a, 101d) sugieren lo primero; pero tampoco faltan referencias (e.g. en *República*, VI 510c-e; VII, 533b-c) que hacen pensar hasta cierto punto en lo segundo, pues dan a entender que los geómetras, dando

quizás de lado la existencia de posibles alternativas, ya tratan de fijar unos supuestos primordiales como si fueran obvios para todo el mundo para tejer a partir de ellos su urdimbre deductiva. El testimonio de Aristóteles resulta parejamente ambiguo: declara que son elementos «las proposiciones geométricas cuyas demostraciones están contenidas en las pruebas de las demás proposiciones geométricas, de todas o de la mayoría» (*Metaphys.* B 3, 998a25-6), y dice que «las demostraciones primeras e implícitas en otras demostraciones se llaman "elementos"» (*Metaphys.* .˙. 3, 1014a35-b2). Quizás sea posible arrojar más luz sobre la cuestión del sentido metodológico de los *Elementos* preeuclídeos desde el siguiente punto de vista, que considera dos modos de abordar las cuestiones matemáticas: como problemas o como teoremas. En cualquier caso, lo que sí parece indicar esa tradición es una progresiva organización sistemática de la geometría bien a partir de unos principios propiamente tales o bien en torno a determinadas proposiciones y resultados capitales para el desarrollo deductivo de un núcleo de cuestiones —esta disyunción no es excluyente y prevé la posibilidad de que ambos usos de los elementos se solapen. Por lo demás, la tradición comporta una conciencia —al menos práctica— del carácter escalonado, conservador y acumulativo de las deducciones que extienden un cuerpo de conocimientos sobre la base de otros conocimientos primordiales o de algún resultado clave en ese contexto. En fin, como revelan los textos aristotélicos que he citado, esa conciencia se torna expresa y manifiesta en la primera mitad del s. IV a.n.e. Más aún: lo que da a entender Aristóteles al referir los elementos no sólo a proposiciones sino a demostraciones es, a mi juicio, que el proceso mismo de adición o construcción de pruebas resulta conservador y acumulativo en el sentido de que la prueba de γ_n a partir de β_j, β_k ... convierte la deducción subsiguiente de γ_{n+1} en una prueba de γ_{n+1} a partir de β_j, β_k ... y, en última instancia si fuera el caso, a partir de las tesis iniciales α_1, α_2 ... de la teoría involucrada. Las teorías deductivas pueden verse entonces bien como series encadenadas de proposiciones o bien como series encadenadas de demostraciones. A esto puede responder, en parte al menos, la atención de Aristóteles al encadenamiento silogístico en su programa de la ciencia demostrativa, y una intuición parecida asoma quizás en la peculiar constitución «metadeductiva» del sistema estoico [1].

---

[1] Pero el análisis lógico sólo ha conseguido hacer plena justicia a esta intuición

1.2 *Problemas y teoremas*

Hay varios indicios de que la matemática griega conocía en la primera mitad del s. IV a.n.e. dos vías relativamente diferenciadas de investigación: una se dirigía a la resolución de problemas y la otra se dirigía a la demostración de teoremas. En el primer caso, el procedimiento más socorrido era la reducción *[apagogé]* del caso considerado a otro más simple y, en general, a una clave (o, como hoy diríamos, una «fórmula») de solución más o menos dominada. La segunda vía propiciaba la consideración de unas proposiciones primeras o primordiales *[arkhaí]* cuyo alcance venía a ser más general y sistemático. Esos indicios aseguran la existencia de ambas, pero no llegan a precisar sus relaciones mutuas ni su forma de convivencia en la práctica matemática.

Los comentarios de Proclo siguen siendo nuestra fuente principal a este respecto, aunque naturalmente su diferenciación entre una y otra vía no deja de hacer referencia a la sistematización y a la homologación deductiva, a la neutralización «axiomática», que los resultados de una y otra presentan ya en los *Elementos* de Euclides. «Las deducciones a partir de unos primeros principios se dividen en **problemas** y **teoremas**, comprendiendo los primeros la generación, división, sustracción o adición de figuras y, en general, los cambios realizados sobre ellas, mientras que los segundos muestran sus atributos esenciales (*In I Euc. Comm.*, 77.7-12). Más adelante Proclo añade: «En los problemas la demostración sirve al propósito de confirmar una construcción ..., mientras que en los teoremas la demostración merece atención por sí misma habida cuenta de su capacidad para revelarnos la naturaleza de lo investigado» (*Ibd.*, 81.15-19). Así que, a primera vista, la prueba de las proposiciones «problemáticas» guarda una relación más estrecha con ciertos postulados y la prueba de las proposiciones «teoremáticas» depende más sustancialmente de las definiciones. (¿Será entonces sintomático que, por ejemplo, no contengan problema alguno ni el libro V, sobre la teoría general de

en el curso actual de desarrollo de la llamada «deducción natural». Por ejemplo, gracias a las investigaciones de Gentzen (1934-1935) en particular, hoy podemos ver las reglas de deducción inherentes a un sistema lógico de «deducción natural» como cláusulas inductivas que determinan una definición del concepto de prueba deductiva en el sistema (vid. N. Tennant: *Natural Logic.* Edinburgh University Press, 1978; § 4.2, pp. 49 ss.; y mi *El análisis lógico: nociones y problemas II,* Madrid, 1987; C, 3-4, pp. 45-71).

la proporción, ni los libros VII-IX sobre aritmética —introducida en VII por medio de definiciones y sin postulados al igual que la proporcionalidad definida en el libro V—?).

Ahora bien, las glosas de Proclo también dan noticia de una diversificación metodológica entre ambas vías de investigación más profunda que la practicada por Euclides. Proclo señala, por una parte, que quienes distinguen entre problemas y teoremas dicen que todo problema entraña no sólo la posibilidad de lo propuesto acerca del caso en cuestión sino la posibilidad de una opción opuesta; en tanto que los teoremas implican desde luego la posibilidad de lo probado sobre el caso considerado pero descartan la posibilidad de una proposición opuesta. Esta indicación parece situar el trato con los problemas en una línea metódica de investigación diferente a la que comporta lógicamente la demostración de los teoremas: la solución de problemas puede confiarse a una indagación de condiciones de posibilidad por vía de análisis; la demostración de teoremas requiere en cambio una lógica más fuerte capaz de establecer la necesidad de unos resultados y la imposibilidad de otros.

Proclo, por otra parte, recuerda la existencia de una polémica entre los partidarios de una y otra vía. Las discusiones surgieron al parecer en el círculo platónico o entre gente más o menos relacionada con la Academia. Speusippo y Anfínomo encabezaban la tendencia a tomar cualquier proposición geométrica como un teorema, arguyendo que las proposiciones geométricas han de versar sobre objetos teóricos inmutables y eternos; pero los problemas son otro cantar pues implican la generación o la producción de algo (e.g. la construcción de una figura o la prolongación de un segmento), de manera que no son asunto propio de una ciencia teórica, contemplativa. Menaekhmo y su escuela juzgaban por el contrario que todas las proposiciones geométricas consisten en problemas de acuerdo con el doble objetivo que caracteriza la matemática: sea el de proporcionar el objeto buscado o sea el de fijarse en un objeto dado para determinar su naturaleza, propiedades y relaciones. Por último, Proclo, aunque personalmente juzga que ambas opiniones están puestas en razón (y pueden reconciliarse según se infiere de la homologación y la subsunción deductiva de unos y otros, problemas y teoremas, en los *Elementos* de Euclides), menciona al «mecánico» Carpo como autor de una obra de astronomía en la que suscita la cuestión de la prioridad entre los teoremas y los problemas para, en definitiva, otorgársela a los problemas.

Uno de los motivos aducidos por Carpo es la conveniencia de descubrir o construir el objeto investigado antes de sentar sus propiedades esenciales, y así da a entender que esta prioridad de los problemas puede tomar un cariz teórico o sistemático —de ahí que el primer teorema de los *Elementos,* I 4, sea subsiguiente a la prueba de tres problemas previos—. Pero otras dos razones invocadas por Carpo hacen referencia a cierta prioridad metódica y quizás histórica de la resolución de problemas sobre la demostración de teoremas. La primera razón estriba en la exactitud y el rigor requeridos por la formulación misma de un teorema, condiciones que inclinan a pensar en la existencia de un trabajo intuitivo anterior como el empleado en la resolución tentativa de problemas. La segunda razón, más significativa aún, es la disponibilidad de una vía relativamente eficaz de descubrimiento en el caso de los problemas, el procedimiento del *análisis* geométrico, sin que por el contrario se conozca ningún método heurístico general que llegue a aplicarse con pareja fortuna a los teoremas. Esta puntualización revela su importancia a la luz de otros indicios sobre el papel que desempeñó la investigación de problemas en la tradición matemática preeuclídea. Aquí no es preciso insistir en un hecho tan conocido como la relación que guarda el desarrollo de la geometría griega con el planteamiento y los intentos de solución de ciertos problemas cardinales, e.g.: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo. Problemas como éstos marcaron profundamente el curso histórico de la geometría griega elemental y superior, antes y después de Euclides [2]. Pero ahora, en este contexto de los métodos de prueba, son otros aspectos de la investigación de problemas los que merecen atención. En particular, tiene especial interés considerar el caso de Hipócrates por el doble motivo de que aparece como el primer autor de un tratado de elementos, en el s. V a.n.e., y a la vez proporciona un vivo ejemplo del método «analítico-reductivo» de prueba que a todas luces caracteriza esta vía de investigación [3].

---

[2] Vid. T. L. Heath (1921, 1981): *A History of Greek Mathematics,* I, c. vii, pp. 218-70; I. Thomas, ed. (1939, 1967): *Selections of greek mathematics,* I, ix, 256-363; W. R. Knorr (1986); *The Ancient Tradition of Geometric Problems,* o.c.

[3] Vid. G. Cambiano (1967): «Il metodo ipotetico e le origini della sistemazione euclidea della geometria», art. c. El estrecho parentesco entre la investigación de los problemas y la vía del análisis es un lugar común entre los estudiosos del significado griego del par metodológico análisis-síntesis. Vid., por ejemplo, el artículo —citado

Simplicio (*In Arist. Phys. Comm.*, 60.22-68.32) ha conservado, al parecer, un extracto de la *Historia de la geometría* de Eudemo sobre la solución de Hipócrates al problema de la cuadratura de la lúnula. De acuerdo con este testimonio, el modo de proceder de Hipócrates sigue una pauta que cabría esquematizar en los términos siguientes:

1/ El enunciado del problema. 2/ La introducción de una proposición β, capital para la solución, a saber: los segmentos semejantes de círculos guardan entre sí la misma razón que (son proporcionales a) los cuadrados de sus bases. 3/ La prueba de β mediante otra proposición γ, a saber: los cuadrados de los diámetros son proporcionales a los círculos respectivos. 4/ La prueba de γ sobre la base de que la razón que guardan los círculos entre sí es la misma que tienen sus segmentos, dado que los segmentos semejantes comprenden las mismas partes en los círculos respectivos (con esto la prueba remite a la primitiva teoría numérica de la proporción que establece la proporcionalidad —o igualdad de razón— entre números cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo, que el tercero del cuarto). 5/ La distinción de los diversos casos comprendidos por el problema (e.g.: la cuadratura de un lúnula cuya circunferencia exterior sea igual, o mayor, o menor que un semicírculo), y su solución mediante la utilización de la proposición β; es interesante anotar de paso que algunos de los casos examinados requieren asimismo el uso de diorismos, i.e. la determinación de ciertas condiciones restrictivas a las que hay que atenerse para lograr una resolución efectiva del problema.

Este orden de razonamiento contrasta con el que será habitual en una demostración euclídea hasta el punto de representar prácticamente el orden inverso. Un euclidiano, puesto en esa tesitura, habría partido de la demostración de γ, esto es: de 4/, puesto que γ es el teorema que preside este núcleo deductivo —conviene reparar en que γ es una proposición de los *Elementos*, XII 2, que Euclides prueba por «exhausción» sobre una base deductiva (*Elementos*, X 1) similar al lema (o «principio») de bisección atribuido a Eudoxo, supuesto que se sienta como mínimo varios años después de que Hipócrates se hubiera ocupado de la cuestión, así que ignoramos

entre las referencias bibliográficas del c. I— de M. S. Mahoney (1968): «Another look at Greek geometrical analysis», y el libro de Knorr (1986) mencionado en la nota anterior.

cómo discurría su prueba en este punto—; de γ habría derivado la prueba de β en la línea 3/, 2/; luego habría deducido los diversos casos de aplicación y, por fin, habría terminado con la reformulación general del resultado alcanzado, i.e. con la reposición de 1/.

Hipócrates también abordó el problema de la duplicación del cubo. Según Proclo (*In I Euc. Comm.*, 212.24-213.11), fue el primero en observar que era reducible al problema de hallar dos medias proporiconales en proporción continua (si a:x :: x:y :: y:b, entonces a^3:X^3 :: a:b) —tal vez guiado por la analogía con la duplicación del cuadrado, problema reducible al hallazgo de una media proporcional. No tenemos más noticias sobre el procedimiento. Pero esta referencia a la reducción de unas cuestiones a otras así como la secuencia seguida en la prueba anterior permiten conjeturar que el método de prueba empleado por Hipócrates en la investigación de problemas se atiene a estas características:

(i) parte de una proposición acerca de unas propiedades conocidas de determinados objetos, proposición que oficia como un conocimiento clave o como un resultado primordial dentro de un núcleo deductivo;

(ii) reduce esta proposición a otra más simple o más general que constituye una condición directa de prueba de la primera y ha de ser establecida asimismo (cosa que se hace a continuación);

(iii) selecciona estas proposiciones o resultados capitales no a título de principios geométricos generales sino en función de las condiciones o de los supuestos pertinentes para el problema particular que hay que resolver.

Este procedimiento resulta tan afín a la vía retroductiva del análisis que puede considerarse una variante suya y bien merece el nombre de «método analítico-reductivo». Por lo demás, no parece ser otro el invocado por Platón cuando menciona y recomienda en el *Menón* (86e-87b) el proceder hipotético *[ex hypothéseos]* que siguen los geómetras: aquí una hipótesis no es un principio como los que gobiernan en último término la demostración de un teorema dentro de una teoría deductivamente ordenada, sino un medio de prueba en el sentido de constituir un supuesto o una condición a la que se retrotrae la solubilidad del problema considerado. Si unimos a este cabo la atribución a Hipócrates de unos primeros *Elementos*, nos inclinaremos a pensar que los elementos en cuestión respondían más bien al sentido amplio o genérico de *«stoikheîa»* y a su empleo como

proposiciones o resultados capitales en núcleos deductivos determinados por la investigación de problemas. En esta misma línea cabría situar los *Elementos* de León habida cuenta de la dedicación de este autor al descubrimiento de diorismos o condiciones de solubilidad efectiva. Ahí se detienen las posibles pistas y nada podemos decir sobre la índole del tratado de Teudio. Sin embargo, Platón en la *Républica* —con posterioridad al *Menón*— da a entender que el método de hipótesis de los geómetras ya no sólo consiste en la heurística *analítica* de problemas, sino que ha iniciado una conversión *sintética* hacia la deducción de teoremas: la geometría ha empezado a inmovilizar ciertos supuestos con el estatuto de pincipios de los que no se debe dar cuenta, pues se asumen como si fueran obvios para cualquiera, y partiendo de ellos va deduciendo el resto hasta concluir en el objeto final de la prueba (VI 510c-d). Otras señales de esta orientación hacia la síntesis deductiva son las prevenciones y advertencias de Aristóteles sobre la inversión sintética del análisis —aunque ésta se vea facilitada en matemáticas por el uso de las definiciones— (*APo.* I 12, 78a7-13), así como la crítica de síntesis apresuradas o ilegítimas que lleva a cabo Menaekhmo en su vindicación del trato heurístico con problemas frente a quienes ya entregaban la geometría a la tarea más sistemática y teórica de la demostración de teoremas. Ya he sugerido que, probablemente, algunos motivos internos de desarrollo de la propia matemática demandaban este tipo de trabajo. Si la metodología de unas condiciones de posibilidad puede avenirse al uso de hipótesis útiles para la resolución de problemas, es una lógica más estricta de la necesidad o de la imposibilidad la que parece exigida por la demostración de teoremas, como reconocieron (según Proclo) los mismos que distinguían entre los problemas y los teoremas en razón de que los primeros no excluyen el atribuir un predicado opuesto al sujeto de la conclusión mientras que los segundos descartan tal atribución de modo absoluto (establecen una propiedad esencial o característica). Pasemos a considerar esos aspectos más internos de esta tradición de la prueba.

1.3 Los conceptos de inconmensurabilidad y proporción.

Una línea de desarrollo sustancial de la prueba matemática discurre a través del estudio crítico de las clases de inconmensurabilidad y de la progresiva elucidación de un concepto comprensivo de proporción.

Como ya hemos visto, en tiempos de Platón hay claras señas si no de identidad, sí de distinción de una prueba matemática estricta. No existe una pauta única o uniforme de argumentación en matemáticas, pero sí aparecen unos rasgos distintivos de los argumentos que aducen los geómetras y, en particular, Teodoro: Platón señala la fuerza de la prueba y de la necesidad *[apódeixin dè kaì anágken]* (*Teeteto*, 162e) que los acompaña. Esta mención expresa de Teodoro es sumamente oportuna en este contexto no sólo por sugerir alguno de los motivos determinantes de la opción por ese tipo de argumentación, sino también para hacerse una idea de la autonomía relativa de tales pruebas geométricas. Teodoro se había formado inicialmente con Protágoras —prototipo de los sofistas de la segunda mitad del s. V a.n.e. que dan lugar a la primera «ilustración» griega—; pero cobra en este diálogo la figura de un matemático «profesional», poco dado precisamente al devaneo intelectual y a las lides dialécticas (164b). Teeteto, discípulo suyo y personaje que da nombre a este diálogo platónico, informa de que Teodoro había conseguido algunos resultados sobre *dynámeis*, potencias o valores de cuadrados. Había probado que las longitudes de los lados de cuadrados con áreas de 3, 5... pies no son conmensurables con la longitud del lado de un cuadrado tomada como unidad —en términos más modernos, tras conocerse el caso de $\sqrt{2}$, Teodoro había establecido la inconmensurabilidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... hasta $\sqrt{17}$—. A esta información Teeteto añade un programa propio de análisis conceptual y de generalización de estos resultados. Tales indicaciones nos permiten suponer que el estudio de los inconmensurables llegó a representar un motivo crítico del desarrollo conceptual y metodológico de la matemática a finales del s. V a.n.e. y principios del s. IV a.n.e. Aunque no sea muy elocuente sobre el tipo de prueba empleado por Teodoro, el texto platónico sí apunta algunos detalles sintomáticos. En 147d Teeteto parece dar a entender que las pruebas de Teodoro se sirven esencialmente de diagramas, se aplican a cada uno de los casos por separado, operan con una métrica geométrica concreta (sobre la base de 3, 5 ... pies) y se detienen por alguna razón no declarada en el caso de los 17 pies. Como ya he señalado, el mismo Teeteto insinúa a continuación la conveniencia de generalizar los resultados de Teodoro habida cuenta de que el número de *dynámeis* de este tipo puede ser ilimitado.

No es fácil precisar la significación histórica y metodológica de todo este pasaje platónico (*Teeteto*, 147c-148b) sobre los resultados

de Teodoro y la contribución ulterior de Teeteto; su interpretación ha suscitado vivas discusiones [4]. Sin embargo, aventuraré algunas precisiones útiles en la perspectiva del desarrollo de la prueba geométrica.

Si nos tomamos un tanto al pie de la letra las sugerencias de Teeteto, podemos imaginar que Teodoro utiliza, para un número dado —a partir de 3—, la construcción de un cuadrado con un área de tantos pies cuantas unidades contenga ese número particular. Luego trata de investigar la conmensurabilidad o inconmensurabilidad del lado de ese cuadrado con una unidad concreta de longitud: así va encontrando diversos casos de inconmensurables, desde $\sqrt{3}$ hasta $\sqrt{17}$, seguramente por reducción de la hipótesis de su conmensurabilidad al absurdo de la igualdad entre el número par y el número impar (vid. Knorr (1975): *The Evolution of Euclidean Elements*, o.c., pp. 170-210). Cabe pensar entonces que la generalización propuesta por Teeteto conlleva una métrica más abstracta (referida a una unidad convencional de magnitud, *rheté*, y no precisamente al pie, *podiaía)* y supone otra vía de discriminación entre conmensurables e inconmensurables capaz de ir más allá del punto en el que Teodoro se detiene. Platón presenta el programa de Teeteto con un lenguaje enrevesado. No obstante, puede entenderse a la luz de un comentario y un escolio del libro X de los *Elementos* de Euclides, que atribuyen a Teeteto buena parte del material sobre la clasificación de líneas irracionales recogido en este libro. El escolio añadido a la proposición X 9, en particular, adjudica a Teeteto el descubrimiento de este resultado: dos líneas conmensurables en longitud guardan proporción con dos números enteros si y sólo si también están en proporción sus cuadrados respectivos. Es decir: sean **A** y **B** dos líneas y **m, n** dos enteros; entonces, **A:B :: m:n** si y sólo si $\mathbf{A^2:B^2 :: m^2:n^2}$ [5].

---

[4] Cf. A. Szabó (1969, 1978), o.c., §§ 1.7-1.14, pp. 55-98: W. R. Knorr (1975), o.c., c. III, pp. 62-108; M. F. Burnyeat: «The philosophical sense of *Theaetetus* mathematics», *Isis*, 69 (1978), pp. 489-513. J. L. Berggren, en su informe (1984): «History of Greek mathematics...», constata que este pasaje del *Teeteto* ha llegado a constituir prácticamente un área con entidad propia dentro de la historiografía de la matemática griega (art. c., p. 395).

[5] El comentario se encuentra en una versión árabe y generalmente ha sido atribuido a Pappo: dice que la teoría de las magnitudes irracionales tuvo su origen en la escuela de Pitágoras y fue desarrollada considerablemente por Teeteto, el ateniense, quien en esta parte de las matemáticas, como en otras, dio pruebas de la habilidad

A esta proposición X 9 sigue en los *Elementos* un porisma que establece la distinción precisa entre la conmensurabilidad en longitud y la conmensurabilidad en cuadrado. Si una línea es conmensurable en longitud *[mêkei]*, es conmensurable en cuadrado *[dynámei]:* pero no vale la relación conversa. Por ende, si una línea es inconmensurable en cuadrado, resulta inconmensurable en longitud, sin que tampoco valga a la inversa. Hay, en suma, magnitudes sólo conmensurables en cuadrado o, en otras palabras, hay líneas inconmensurables en longitud pero racionales por cuanto constituyen el lado de un cuadrado racional (vid. infra, § 3.2 D). Así podríamos leer en el *Teeteto* 148b un criterio de demarcación entre la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad en longitud: dos líneas son conmensurables en longitud si y sólo si los cuadrados constituidos sobre ellas tienen entre sí la misma razón que en un entero cuadrado con otro entero cuadrado. La conmensurabilidad en longitud descansa en la proporcionalidad entre unos enteros cuadrados. Por otra parte —y aquí despunta la generalización de los resultados de Teodoro que había insinuado Teeteto—, la raíz cuadrada de un entero no cuadrado es inconmensurable en longitud con la unidad. Pues bien, ¿qué procedimiento y qué idea de proporción permitieron a Teeteto llegar a estos resultados?

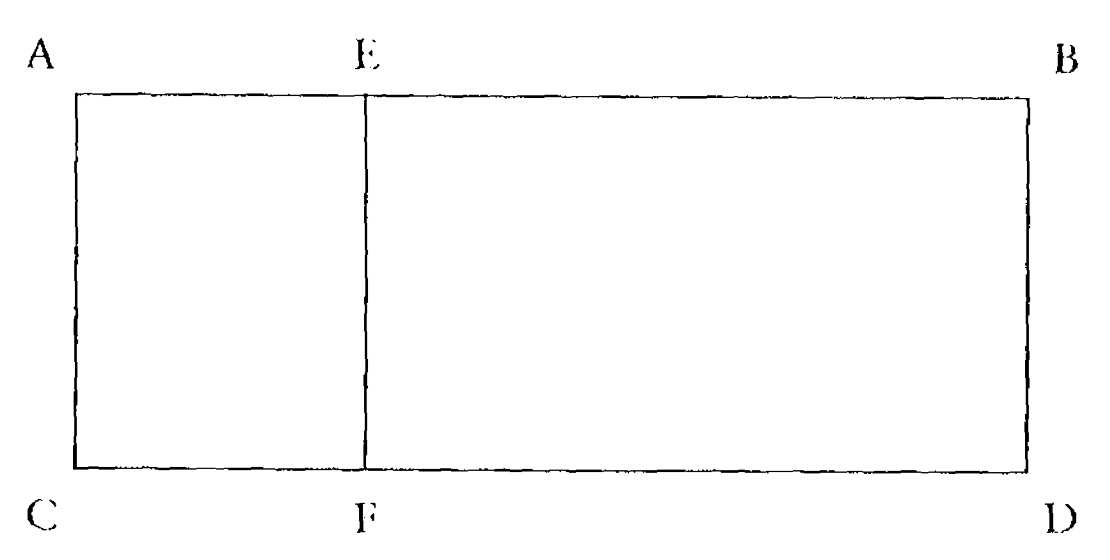
Un procedimiento y una idea de proporcionalidad disponibles a estos efectos, por entonces, eran los derivados del método anthyphairético. El método de *antyphaíresis* o de reducción por sustracciones sucesivas viene recogido en los *Elementos* euclídeos, donde reviste la forma de un algoritmo para determinar el máximo común divisor de números enteros dados (VII 1-3): representa un desarrollo de la operación práctica de reducir una razón a sus menores términos. Pero reaparece asimismo en el libro X bajo la forma de un algoritmo para determinar la medida común máxima de unas magnitudes conmensurables (X 3-4). Quizás su uso primigenio también estuviera ordenado a un cálculo aproximativo de cantidades no racionales. Sea como fuere, hay indicios de que el método anthyphairético pudo representar una manera de superar las limitaciones de la

---

por la que ha sido justamente admirado, vid. Heath (1926 [2]), edic. c., 3, p. 3. El escolio a X 9 (Schol. X 62) asegura que este resultado fue hallado por Teeteto y Platón se hace eco de él en el *Teeteto,* aunque allí aparece en forma restringida mientras que en los *Elementos* tiene una formulación general; vid. Heiberg, edic. c., (1888) V *Scholia,* p. 450.

primitiva teoría numérica (pitagórica) de la proporcionalidad. Por lo menos, dio la oportunidad de disponer de un criterio efectivo de conmensurabilidad: dos magnitudes son conmensurables si su *anthyphaíresis* es finita. Es posible, además, que deparara un procedimiento para hallar razones iguales y para manejar razones desiguales. Hay una alusión de Aristóteles que merece la pena recordar. Aristóteles está hablando de las dificultades dialécticas que encierran las discusiones sobre asuntos faltos de definición. «También en las matemáticas —añade— parece que algunas <figuras> no se dejan trazar fácilmente por una falta de definición, e.g. que la <recta> paralela al lado, que corta la figura plana, divide de modo semejante la base y el área. En cambio, apenas está dada la definición, queda inmediatamente de manifiesto lo que se ha dicho: pues las áreas y las bases tienen la misma *antanaíresis;* y ésta es la definición de la misma razón (*Top.* VIII, 158b28-35).

Considérese la figura adjunta. La línea EF, paralela a AC, corta la figura plana ABCD. Entonces, AE: EB:: AECF : EBFD; pues el



par AE, EB y el par AECF, EBFD tienen la misma antanaíresis. Por una glosa de Alejandro sabemos que *«antanaíresis»*, el término empleado por Aristóteles, es sinónimo del más familiar *«anthyphaíresis»;* así pues, en esta perspectiva, podemos reconocer un concepto preciso de proporción: son proporcionales, o tienen la misma razón entre sí, aquellas magnitudes cuya *anthyphaíresis* es la misma. Siguiendo esta línea vemos en el teorema que cita Aristóteles un lema fundamental del libro X de los *Elementos* pues permite la correlación entre líneas y áreas rectangulares, sean conmensurables (e.g. en X 19, 20) o sean inconmensurables (e.g. en X 21) [6].

---

[6] Vide W. R. Knorr (1975): *The Evolution of Euclidean Elements,* o.c., cc. VII y VIII, pp. 211 ss.; I. Bulmer-Thomas: «Theaetetus», en Ch. C. Gillispie, ed. (1981): *Dictionary of Scientific Biography,* o.c., t. 13-14, pp. 301-7.

Creo que las indicaciones precedentes abonan esta conjetura sobre el curso y el sentido de las investigaciones de Teeteto: Teeteto, movido por el propósito de una conceptualización y una clasificación general de las líneas inconmensurables, extendió a la geometría el campo de aplicación de la *anthyphaíresis* y con ello pudo beneficiarse de una noción anthyphairética de proporción. Pero su investigación no logró una teoría cabal ni sobre el concepto de proporción ni sobre las líneas irracionales —aunque éstas fueran el objetivo primordial de su trabajo—. Los testimonios acerca de la contribución de Teeteto insisten en que sus resultados fueron desarrollados y completados por la intervención ulterior de Eudoxo y Hermótimo de Colofón hasta culminar en la madurez deductiva y teórica que muestran los *Elementos* de Euclides. Nada sabemos de Hermótimo en este sentido. En cambio, hay algunas noticias fiables sobre el papel de primer orden que tocó a Eudoxo desempeñar en esta línea de desarrollo. Se le han adjudicado, entre otros méritos, una formulación del llamado «principio de bisección» (en términos próximos a X 1) y la definición de una teoría general de la proporción en términos de equimúltiplos (más o menos similar a la def. 5 del libro V de los *Elementos)* [7].

Es posible que Eudoxo, haciéndose eco de la creciente importancia que el círculo platónico atribuía a la corrección formal del discurso, examinara el comportamiento de la versión anthyphairética de la proporción y advirtiera la necesidad de un principio de bisección como el suministrado por el lema X 1 para probar rigurosamente ciertos resultados avanzados por ese método (e.g. el teorema: si unas magnitudes A, B, C mantienen la proporción A:C :: B:C, entonces A es igual a B —proposición V 9 de los *Elementos)* y,

[7] La atribución a Eudoxo de un supuesto semejante descansa en las reiteradas referencias de Arquímedes a sus teoremas sobre el volumen de la pirámide y del cono (en el prefacio a *Sobre la cuadratura de la parábola,* en *Sobre la esfera y el cilindro* I, en el preámbulo a la carta a Eratóstenes sobre el *Método);* también consta en el prefacio de la *Métrica* de Herón. La atribución a Eudoxo de una teoría «general» de la proporción se funda ante todo en referencias indirectas de Aristóteles (e.g. *APo.* I 5, 74a17-20; II 17, 99a9-11) y en referencias directas del escoliasta del libro V: según el schol. 1, «algunos dicen que este libro es un descubrimiento de Eudoxo, el discípulo de Platón»; según el schol. 3, «se dice que este libro es de Eudoxo... pero tanto por lo que toca a la compilación de estos elementos como por lo que se refiere a su disposición congruente con la secuencia ordenada de las otras cosas, todo el mundo lo reconoce como obra de Euclides» (Heiberg (1888) V, pp. 280 y 282 respectivamente; Stamatis (1977) V, pp. 211 y 213).

sobre todo, para refinar algunos usos intuitivos de la «exhausción» (e.g. el ensayo de Antifón de cuadrar el círculo mediante la duplicación sucesiva de los lados de un polígono regular inscrito). El principio de bisección establece que si se sustrae la mitad —o más de la mitad, en X 1— de una magnitud dada y luego la mitad —o más de la mitad, en X 1— de la magnitud restante, y así sucesivamente, llegará un momento en que el resto será menor que cualquier magnitud prefijada del mismo tipo. Este principio funciona como un lema en la obtención de ciertos resultados recogidos por Euclides en el libro XII (los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros, la pirámide es la tercera parte del prisma con la misma base e igual altura, el cono es la tercera parte del cilindro con la misma base e igual altura), y al parecer probados antes por Eudoxo. Pero estas aplicaciones del principio de bisección traían consigo además el uso implícito de otro supuesto acerca de las razones entre magnitudes. Euclides lo explicita como una definición, la definición 4 del libro V de los *Elementos:* dos magnitudes, para guardar una razón, deben ser tales que un múltiplo de la menor pueda exceder a la mayor; luego, sobre esta definición, prueba el principio de bisección como un teorema (X 1). Arquímedes ofrece una versión del supuesto algo distinta y más congruente con los resultados probados por Eudoxo, e.g.: «de líneas desiguales, superficies desiguales y sólidos desiguales el mayor excede al menor en una cantidad tal que, añadida a sí misma, puede exceder cualquier magnitud del tipo de las comparadas» (asunción 5 de *Sobre la esfera y el cilindro,* que suele denominarse «postulado de continuidad» o «condición arquimediana»). Aristóteles ya está al tanto de la relación que hay entre la capacidad de una magnitud para exceder por adiciones sucesivas cualquier límite finito y nuestra capacidad para agotar una magnitud finita por sustracciones sucesivas de partes proporcionales (*Phys.* III 6, 206b4-12), esto es: puede entrever la relación existente entre un supuesto de continuidad como la definición V 4 o la condición arquimediana y la proposición X 1 o el lema de bisección. Por otra parte, en *APo.* II 17 alude a la propiedad de crecimiento indefinido por la que cabe demostrar teoremas generales de la teoría de las proporciones. La fuente de información de Aristóteles difícilmente podía ser a la sazón otra mejor que Eudoxo, aunque no sabemos el alcance justo de la contribución de Eudoxo en tal sentido. En todo caso podemos atribuir a Eudoxo una teoría de la proporción más satisfactoria que la anthyphairética desde el punto de vista deducti-

vo. En primer lugar, de Eudoxo parte un criterio de proporcionalidad consistente en la comparación de equimúltiplos de magnitudes homógeneas. Es posible que el criterio eudoxiano original tuviera el sentido siguiente: Sean **(A, B)** y **(f, g)** dos pares de magnitudes conmensurables. Si las magnitudes **A** y **B** y las magnitudes **f** y **g** tienen como medidas comunes **C** y **h**, respectivamente, de modo que **A** = **nC** y **f** = **nh** mientras que **B** = **mC** y **g** = **mh**, entonces **A : B :: f : g** (de los *Elementos* VII 10 cabría derivar como corolario una aplicación de este criterio no ya a magnitudes sino a números). En segundo lugar, la teoría de la proporción de Eudoxo permite obtener demostraciones generales donde antes sólo había lugar para pruebas separadas por casos. Aristóteles menciona en particular uno de los teoremas de esta teoría sobre la propiedad *enállax* de la proporción cuya prueba constituye a su juicio un paradigma de la demostración universal *[kathólou]*. Así, a tenor de *APo.* I 5, 74a17-25: la propiedad de alternancia de la proporción se ha establecido por separado para números, líneas, sólidos, tiempos, pero puede probarse universalmente en una sola demostración; según *APo.* II 19, 99a9-11: la explicación de la alternancia es distinta para líneas y números si se tiene en cuenta que unas y otros son objetos diferentes entre sí, pero es la misma si se repara en que líneas y números obedecen a un modo determinado de crecimiento *[aýxesin toiaudí]*. (La alternancia en cuestión es el teorema V 16 de los *Elementos*, a saber A:B :: C:D si y sólo si A:C :: B:D)

Quizás el último paso en esta línea de generalización y de asentamiento deductivo sea el dado por la teoría euclídea del libro V. De modo análogo a como la definición 4 trata de fundamentar el empleo de la bisección (X 1), la definición 5 suministra un criterio efectivo de proporción y la definición 7 —del concepto de «guardar una razón mayor que»— da a su vez un criterio correlativo de desproporción. Sobre esta base, la teoría de libro V de los *Elementos* no sólo cancela la deuda de las teorías anteriores con la distinción entre conmensurables e inconmensurables, sino que depara pruebas más fuertes pues de hecho implica un sistema totalmente ordenado de magnitudes y razones (vid. infra, § 2.4B).

Resumo: el interés inicial por la conceptualización y la generalización en el tema de los inconmensurables tiene por diversos motivos —entre los que se cuentan el creciente rigor de las pruebas y la conveniencia de disponer de definiciones precisas en las demostraciones— una inflexión que orienta la investigación hacia una nueva

teoría, general y relativamente sistemática, de las proporciones. Esta teoría, iniciada por Eudoxo, ya representa entonces para Aristóteles una muestra ejemplar de la generalidad, la abstracción y la articulación interna del conocimiento matemático.

Aristóteles, conociendo la versión anthyphairética y la nueva teoría eudoxiana, podía tener buenas razones para advertir las ventajas de ésta última. La verdad es que había a su alrededor ilustraciones concretas no sólo de su mayor generalidad sino también de su mayor rigor demostrativo. De la primera ya hemos visto el caso de la propiedad de alternancia de la proporción. Por lo que se refiere al segundo, recordemos un resultado ya citado también, que Aristóteles aduce en un contexto anthyphairético (*Top.* VIII, 158b29-35), la semejanza entre la base y el área de una figura plana cortada por una recta paralela a uno de sus lados. Su aplicación a segmentos no sólo conmensurables sino inconmensurables envolvería, conforme al concepto anthyphairético de proporción, una generalización inductiva que los griegos no estaban en condiciones de sentar al carecer de un principio general de inducción matemática. En cambio, la prueba por medio del concepto eudoxiano no supondría sino una adaptación de la proposición VI 1 de los *Elementos* y, gracias a ella, podría renunciar a unas presuposiciones informales, como esa generalización inductiva, cuya justificación quedaba fuera del alcance de los medios entonces disponibles en la matemática griega [8].

---

[8] W. R. Knorr (1975) ofrece reconstrucciones de la prueba anthyphayrética y de la prueba eudoxo-euclidiana, o.c., Appendix B, pp. 334-7. Para más información sobre la conjeturable teoría eudoxiana de la proporción, vid. Knorr (1978): «Archimedes and the pre-euclidean proportion theory», art. c. También cabe imaginar que la sustitución de la concepción anthyphairética por las de Eudoxo y Euclides trajo consigo una integración progresiva del concepto de *razón* en el contexto del concepto de *proporción*, donde el primero perdió sus propias señas de identidad. Es sintomático que la definición 3 de razón en el libro V de los *Elementos* no rinda ningún servicio y que Alejandro, comentador tardío de Aristóteles, al referirse al pasaje donde éste menciona la *antanaíresis* como criterio de la misma «razón» *[lógos]* (Top. VIII 3, 158b29-35), entienda que Aristóteles habla de un criterio para la misma proporción *[análogon]*. Sobre esta conjetura de una teoría anthyphairética de las razones vid. D. H. Fowler (1979): «Ratio in early greek mathematics», art. c.; (1988): «Logos (ratio) and Analogon (proportion) in Plato, Aristotle, and Euclid», en J. Petitot, ed.: *Logos et Théorie des Catastrophes*. Genève, 1988, pp. 444-472.

2. *Los* Elementos *de Euclides.*

2.1. El lugar y el sentido de los Elementos de Euclides en la tradición de la prueba matemática.

Los comentadores antiguos ya se encargaron de situar los *Elementos* de Euclides en el lugar que les correspondía por su contribución al desarrollo de las matemáticas y a la madurez de la tradición de la prueba matemática. Proclo, tras hacer referencia a los autores reseñados en la *Historia de la Geometría* del discípulo de Aristóteles, Eudemo, continúa allí donde ésta había debido detenerse: «No mucho más joven [que Hermótimo de Colofón y Filipo de Medma, discípulos de Platón] es Euclides, quien compiló los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando asimismo demostraciones irrefutables de aquéllo que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor» (*In I Euc. Comm.*, 68.6-12). Hay, desde luego, testimonios expresos de algunas aportaciones concretas de Euclides en esta línea de perfeccionamiento: en la dirección de unas formulaciones más generales de resultados anteriores, una mejor disposición sistemática y deductiva de las pruebas, un rigor mayor y una definición más precisa de los conceptos en contextos teóricos relativamente fundamentales como los determinados por la teoría de la proporción y por la clasificación de magnitudes conmensurables e inconmensurables. Por ejemplo, el mismo Proclo, al glosar la proposición I 47 (el «teorema de Pitágoras»), confiesa la admiración que le merecen los primeros en dar con tal resultado pero añade que aún le maravilla más el autor de los *Elementos* no sólo por la calidad de la demostración de I 47, sino por la prueba ulterior de una proposición más general en el marco de la teoría de la proporción (*Elementos*, VI 31). Por otra parte, en el libro V (justamente dedicado a presentar esta teoría cuya base conceptual se había fraguado antes de Euclides), el escolio 3.º declara que «la disposición del libro en punto a los elementos y a la secuencia ordenada de los teoremas es reconocida por todos como obra de Euclides». En fin, según un comentario atribuido a Pappo, Euclides «se dispuso a dar reglas seguras que logró establecer acerca de la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad en general; hizo precisas las definiciones y distinciones entre magnitudes racionales e irracionales, sentó un gran

número de clases de magnitudes irracionales y, finalmente, mostró con claridad todo su campo de aplicación» (vid. Heath (1929 [2]): *The Thirteen Books of the Elements,* edic. c., vol. III, pp. 3-4).

El lugar de los *Elementos* y su contribución a la madurez de la tradición de la prueba matemática adquieren justo relieve a la luz del sentido que los comentadores griegos confieren a los tratados de este tipo. La composición de *Elementos* de matemáticas era un empeño capital en varios aspectos, tanto teóricos y metodológicos como didácticos y disciplinarios; pero no implicaba una estrategia única o uniforme (en §§ 1.1 y 1.2 ya he aludido a la peculiar metodología analítico-reductiva que podría haber seguido Hipócrates); y, por lo demás, nada garantizaba en principio el éxito cabal de la empresa o la significación del camino elegido. Este podía conducir a unas reducciones sistemáticas más triviales o limitadas que lo que sería de desear y, para colmo, el hallazgo de unos *arkhaí* auténticos y de los principios peculiares de una disciplina tampoco estaba asegurado de antemano (el propio Aristóteles había reparado incidentalmente en algunas contingencias de la captación *[noûs]* de los primeros principios de una ciencia). Proclo, en su larga digresión sobre la noción de *stoikheîa* (*In I Euc. Comm.,* 72 ss.), también advierte que, en todas las ciencias, «es difícil seleccionar los elementos y disponerlos en el orden debido... Y de quienes han abordado esta empresa, unos han sido capaces de compilar más y otros menos; unos han dado pruebas más sucintas y otros han dilatado sus investigaciones con interminables minucias; algunos han evitado el recurso de la reducción al absurdo, otros han descartado el uso de las proporciones, otros han ideado pasos preliminares dirigidos contra quienes desechan los principios; y, en suma, muy diferentes métodos han sido los inventados por los diversos autores de *Elementos*».

Proclo, sin embargo, trae a colación ciertos motivos o razones que acreditan la excelencia de los *Elementos* de Euclides en la tradición de la prueba matemática sobre otros tratados anteriores o posteriores del mismo género. De entre los motivos aducidos por Proclo, diré que unos son más bien de carácter «metodológico» —guardan relación con la constitución de un cuerpo deductivo de conocimientos—, mientras que otros tienen un sentido más bien «disciplinario» —hacen referencia a una normalización de la forma de exponer la materia tratada y de instruirse en ella—. Hago esta distinción con el fin puramente pragmático de llamar la atención sobre las dos vertientes que conforman los tratados sistemáticos de

este tipo. (Reconozco que tal diferenciación habría pasado seguramente inadvertida en el medio helénico que da origen a esta forma de exposición racional y sistemática de un cuerpo de conocimientos, a su normalización deductiva; recordemos que para Aristóteles los silogismos demostrativos *[apodeiktikoí]* de los *Analíticos* no son sino los silogismos instructivos *[didaskalikoí]* de los *Tópicos;* en todo caso es una distinción de la que Proclo no parece cuidarse en absoluto.)

Los motivos «metodológicos» vienen expuestos en un pasaje donde Proclo trata de resumir las virtudes que realzan los *Elementos de Geometría* euclídeos (*In I Euc. Comm.*, 69.4-27). La primera es el orden y la selección que gobiernan los teoremas y problemas considerados «pues él (Euclides) no ha incluido todo lo que podría haber dicho sino sólo lo pertinente para la construcción de los elementos». La segunda virtud es la riqueza de recursos metódicos: «Ha utilizado toda suerte de deducciones concluyentes, unas que obtienen su cogencia de los primeros principios, otras que parten de pruebas demostrativas, pero todas ellas incontestables y precisas y congruentes con el conocimiento científico. Por añadidura se ha servido de todos los métodos dialécticos, el de división en el descubrimiento de figuras, el definitorio en las pruebas existenciales, el apodíctico al pasar de los principios a los resultados buscados, el analítico en el camino opuesto desde lo buscado hasta los primeros principios...»; a todo lo cual se añade el uso hábil y certero de diversas formas de conversión geométrica. La tercera virtud que Proclo se considera obligado a mencionar guarda una relación más estrecha con la sistematización deductiva: es la continuidad de las pruebas y, en particular, el hecho de proceder en el orden de consecuencia debido.

Los valores «disciplinarios» aparecen en el contexto antes citado (72 ss.) de la digresión en torno a la noción de elemento y la confección de tratados *elementales.* «Es esencial —dice Proclo— que un tratado de este tipo se vea libre de todo cuanto sea superfluo (pues esto obstaculiza la adquisición de conocimientos); debe cribar todo lo comprendido por el objeto de estudio y resaltar lo importante (pues así presta un gran servicio a la ciencia); ha de poner sumo cuidado tanto en la claridad como en la concisión (pues sus contrarios entorpecen la comprensión); debe proponerse la formulación de los teoremas en términos generales (pues parcerlar la instrucción en casos particulares hace difícil la consecución del conocimiento). En todos estos aspectos —concluye Proclo—, el sistema de los elemen-

tos de Euclides resulta superior a los demás» (vid. Heath (1926) [2], edic. c., I, p. 115). Está claro que la motivación subyacente en cada una de estas condiciones tiene que ver ahora con la exposición y aprendizaje racionales de un cuerpo normalizado de conocimientos (una materia o una disciplina), antes que con su constitución sistemática interna o con las virtudes señaladas en la cita anterior.

Esta significación didáctica y disciplinaria del tratado de Euclides reaparece entre los objetivos que Proclo atribuye al propio autor (*In I Euc. Comm.*, 70.19 ss.). Los presuntos objetivos de Euclides al confeccionar los *Elementos* serían dos. El primero se refiere al objeto de la investigación: Proclo, en su vena platónica habitual, supone que la geometría globalmente considerada tiene que ver con las figuras cósmicas, con los cinco sólidos regulares de que trata el libro XIII, y asegura que el propósito final de la contribución de Euclides es justamente la construcción de estas figuras platónicas. La verdad es que el tratado, aunque se cierre con el broche de las figuras tendenciosamente llamadas «platónicas», no deja entrever ninguna intención de Euclides a este respecto. El segundo objetivo, en cambio, hace referencia al aprendizaje de la disciplina y resulta a todas luces mucho más perceptible. Desde este punto de vista los *Elementos* son descritos como el medio de «perfeccionar la intelección del conjunto de la geometría por parte del estudiante» (71.8), pues —asegura Proclo— partiendo de unos elementos cabe adquirir conocimiento de las restantes partes de esta ciencia, mientras que sin ellos será imposible comprender una materia tan compleja y resultará inalcanzable el conocimiento del resto. Según un testimonio recogido por Herón (*Definitiones,* 160.8 s.), ya decían los peripatéticos que la retórica, la poesía y la música popular podían entenderse sin un curso previo de formación, pero nadie era capaz de adquirir conocimiento de las cosas que tenían el nombre especial de «matemáticas» a menos que hubiera seguido un curso de introducción; «y por esta razón —explica Herón— el estudio de estas materias fue llamado "matemática" *[mathematiké]*» (término relacionado con el verbo *manthάno:* «aprender, estudiar, instruirse»).

Todos estos indicios permiten aventurar unas consideraciones iniciales sobre el lugar y el sentido de los *Elementos* de Euclides que cabe resumir en las cuatro siguientes:

(a) La composición de Euclides fue, para empezar, un repertorio básico de resultados y proposiciones demostradas tan cumplido que hizo ocioso cualquier otro tratado matemático del mismo alcance y

género —según muestra su fortuna histórica de manual por antonomasia, «los *Elementos*»—, y devino una referencia común en las investigaciones subsiguientes: siempre que se necesite un lema elemental bastará, por lo regular, mencionar la presencia de tal proposición en los *Elementos* de Euclides —las raras excepciones, e.g. la independencia de Arquímedes o incluso su renuncia a citar los *Elementos*, confirman la regla [9].

(b) Los *Elementos* mantienen unas curiosas relaciones de continuidad y de discontinuidad con el desarrollo de la tradición matemática anterior. Luego, al considerar más de cerca la constitución del tratado, volveremos sobre este punto. Ahora es suficiente anotarlo para ahorrarse juicios prematuros sobre la mayor o menor originalidad de Euclides. En realidad, la idea de que Euclides no pasó de ser un compilador aplicado de resultados triviales es tan injusta como injustificado está el atribuir genéricamente su metodología sintética deductiva a la tradición anterior, por no hablar ya de pruebas concretas [10].

(c) La contribución de Euclides fijó una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática. También re-

---

[9] Por lo demás, ni siquiera esta excepción es absoluta: Arquímedes se sirve en ocasiones de las técnicas euclídeas comunes en vez de desarrollar las suyas propias. Este punto puede ser significativo para una reconstrucción cronológica del corpus arquimediano, vid. W. R. Knorr (1978): «Archimedes and the *Elements:* proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus», art. c.; cf. T. Sato; (1986, 1987): «A reconstruction of *Method* proposition 17, and the development of Archimedes thougth...», art. c.

[10] Aristóteles puede dar testimonio de ciertos resultados matemáticos preeuclídeos recogidos en los *Elementos.* Pues bien, es ilustrativo cotejar las pruebas mencionadas por Aristóteles con las aducidas por Euclides. E.g.: la prueba de que los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales en *APr.* I 24, 41b13-22, con la prueba del teorema correspondiente I 5; la prueba de que los tres ángulos del triángulo equivalen a dos ángulos rectos aludida en *APr.* I 35, 48a29-39, con la prueba de I3; la prueba de que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto en *APo.* II 11, 94a24-35, con la prueba de III 32. Al pasar revista al contenido de los *Elementos* en §§ 2.3 y 2.4, habrá ocasión de ir precisando las contribuciones originales de Euclides. Muestra divertida del tópico que opone un Euclies de cartón piedra, triste dómine compilador, al genio vivo del investigador matemático (Eudoxo, Arquímedes), es el c. 20 «Research, ancient and modern» de E. C. Zeeman: *Catastrophe Theory: Selected Papers 1927-1977.* Reading (Mass.), 1979; pp. 605-614.

presentó una normalización de la exposición demostrativa de las proposiciones geométricas. Estos dos aspectos de lo que luego recibiría el nombre de «*ars disserendi*», el metodológico y el expositivo, —solidarios desde antiguo no sólo dentro de la tradición de los *Elementos,* sino en el amplio marco de la argumentación racional que preconizaba la Academia platónica—, coadyuvaron, mediante su ejemplar materialización en el tratado euclídeo, a la instauración alejandrina de la geometría como la disciplina matemática (demostrativa) por excelencia.

(d) El estatuto disciplinario de los *Elementos,* en consonancia con (a) y (c), reforzó la significación de algunas opciones teóricas de Euclides y, así, los *Elementos* tuvieron una repercusión no sólo metódica sino sustantiva en las formas de conceptualización científica de su tiempo: cuando menos, marcaron un hito decisivo en la geometrización de las matemáticas helénicas y sus dominios de aplicación (geometrización que, desde luego, ya venía avalada por una tradición anterior).

Estas indicaciones no quieren dar a entender en absoluto que la matemática griega posterior sólo sea un conjunto de notas a pie de página de los *Elementos.* Es cierto que buena parte de la matemática alejandrina discurre bajo la forma de glosas marginales, lemas auxiliares y pruebas alternativas añadidas al tratado de Euclides, dando por sentada su condición de arquetipo de la ciencia geométrica. Como también es cierto que algunos miembros de la comunidad alejandrina instituyeron pronto una especie de estricta observancia euclídea y asumieron funciones de vigilancia y custodia del *corpus* euclídeo: por lo menos, surgen voces descalificadoras cuando alguien parece poner en cuestión ciertos supuestos clave de esta ortodoxia (e.g. la prioridad de la geometría o la restricción a ciertos métodos canónicos de prueba en la resolución de determinados problemas, según muestran las censuras que salpicaron a veces a matemáticos de la categoría de Conón, Arquímedes o Apolonio). Sin embargo, el alcance de la institucionalización geométrica y de la proyección matemática de los *Elementos,* en su propio medio helenístico, no deja de ser un tanto relativo. Pues también es verdad que, antes y después de Euclides, e incluso en geometría, los matemáticos griegos emplearon y desarrollaron nociones y métodos diversos a los consagrados por los *Elementos* y exploraron otros dominios de las matemáticas al margen de los que allí se contemplaban. Por lo demás, ni siquiera la actividad del mismo Euclides, a la luz de los fragmentos y noticias que nos han

llegado de otras obras suyas, se quedó apresada en los límites de esa *chef-d'oeuvre.*

2.2 En el nombre de Euclides.

Es opinión común que la fortuna de los *Elementos* como espejo y norma de la sistematización deductiva de la geometría y la instauración consiguiente de la materia como disciplina encubrieron el rastro de los tratados anteriores del mismo género y velaron el rostro de su propio autor. Ya veremos en qué sentido o hasta qué punto los *Elementos* de Euclides ocultan su pasado. Lo que parece indiscutible es el desvanecimiento (casi hasta la desaparición) de la persona que los escribió. De Euclides sólo tenemos dos noticias relativamente dignas de crédito. Una: era más joven que los discípulos de Platón (muerto en 347 a.n.e.), mayor que Arquímedes (nacido hacia 287 a.n.e.), coetáneo de Ptolomeo I. Dos: enseñó en Alejandría. Así pues, cabe estimar que alcanzó su madurez en torno al 300 a.n.e. En todo caso, ya en el curso de este mismo siglo III a.n.e. pasa a ser conocido como *«hó stoikheiotés»* (el elementador, el autor de los *Elementos*).

No debemos extrañarnos de que su nombre deviniera pronto el epónimo que hoy nos es familiar: «Euclides», un nombre para una disciplina o para un método de axiomatización. Es bien conocida la carta de presentación del personaje Euclides en la celebrada guía de Alenjandría de E. M. Forster: «Nada sabemos de él —escribe Forster—: a decir verdad, hoy lo consideraremos como una rama del saber más que como un hombre». Y una impresión parecida tenían ya algunos escritores helenísticos. Aeliano, cuya vida transcurre entre los ss. II-III, escribe en un tratado moralizante sobre las peculiaridades del mundo animal (*Perì dsóon idiótetos)* que «las arañas pueden trazar un círculo sin necesitar nada de Euclides», sin necesidad de conocimientos geométricos. Si la conversión de Euclides en el espejo del método axiomático y de la deducción matemática informal tiene asimismo raíces antiguas —Proclo sería un buen testigo al respecto—, aún cobra mayor relieve a partir del s. XVII, en el marco de la metodología presidida por el «l'esprit de la géometrie» y por el encadenamiento de las demostraciones «more geometrico». Quizás sea entonces cuando adquiere pleno sentido una observación de L. Brunschvigc: «Euclides, para las numerosas generaciones que

se han nutrido de su sustancia, puede que haya sido menos un profesor de geometría que un profesor de lógica» (*Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1947 [3]; § 49, p. 84).

Tanto esa proyección específicamente disciplinaria como esta proyección metodológica general del «viejo profesor» descansan en el especial estatuto conferido a los *Elementos* como tratado *paradigmático* de la geometría helenística. Pero si hemos de evitar juicios apresutados y algún que otro equívoco no sólo sobre este papel de los *Elementos*, sino sobre sus repercusiones como modelo de sistematización deductiva para otras disciplinas (e.g. astronomía, medicina), no estará de más detenerse un momento a considerar algunas de las circunstancias concurrentes en las diversas fases de esta implantación.

Para empezar, y al margen de las virtudes internas y de la calidad del tratado que antes he reseñado, obran en su favor ciertos procesos históricos, sociales e institucionales. Ahora no cabe reconstruir el marco general de la ciencia helenística. Me limitaré a recordar las tres circunstancias siguientes: 1, la hegemonía de la escritura, que favorece la confección de tratados sistemáticos, la clausura relativa de cuerpos de conocimiento y la normalización de los métodos de exposición y prueba; 2, la aparicición de nuevas instituciones académicas (e.g. la Biblioteca y el Museo de Alejandrina) capaces de irradiar en torno suyo el halo de unas primeras comunidades de especialistas o practicantes de una disciplina (en áreas tan diversas como lo puedan ser la matemática y la crítica literaria); 3, la incipiente bifurcación entre la filosofía y estas especialidades científicas o eruditas, alentada no sólo por motivos internos de desarrollo y orientación en cada caso sino por otras circunstancias extenas (e.g. esa misma promoción de nuevos centros culturales helenísticos más o menos al margen de las escuelas filosóficas de Atenas). Sea cual fuere el grado de influencia que les atribuyamos, estos aspectos configuran —entre otros— el marco en el que la obra de Euclides viene a ejercer de paradigma de la geometría alejandrina: allí marca la autonomía sistemática de la disciplina geométrica, determina ciertos contenidos conceptuales y sus bases teóricas, consagra la legitimidad de ciertos procedimientos de prueba. «Los *Elementos* contienen una guía incontestable y perfecta de la investigación científica misma en materia de geometría», sentencia Proclo (*In I Euc. Comm.* 70.16-18). En suma, son el archivo de lo que constituye el acervo común de los practicantes de la disciplina y, llegado el caso, pueden

funcionar como norma o criterio de pertenencia a esa comunidad científica.

Pero, por otra parte, los *Elementos* también aparecen sobre un trasfondo de discusiones y de tradiciones dispares que militan en contra de su aceptación y de su implantación absolutas. Según recuerda Proclo (*In I Euc. Comm.* 199.3-14), varios autores helenísticos oponen objeciones a la geometría y, en particular, a la sistematización euclídea. La mayor parte de ellos dudan de los principios y tratan de mostrar que las proposiciones derivadas resultan infundadas: unos, como los escépticos, porque no admiten los principios ni en general la existencia de la ciencia demostrativa; otros, como los epicúreos, porque discrepan de los principios geométricos (199.3-5). Aunque también hay quienes, reconociendo los principios, niegan que sus consecuencias estén demostradas a menos que se añadan o declaren otros supuestos no explicitados (199.11-14); entre éstos últimos críticos quizás se encuentre algún filósofo (e.g. el epicúreo Zenón de Sidón), pero su actitud parece ser la típica de los comentadores y editores de los *Elementos*. Si bien estas y otras noticias ocasionales que poseemos o no son demasiado completas ni precisas [11], sí son harto elocuentes: el privilegiado estatuto de los *Elementos* no excluye, desde luego, la discusión y las discrepancias

[11] Fijan la posición escéptica de Sexto Empírico, hábil para explotar las dificultades que envuelve el intento de «definir» unas nociones tan básicas, primitivas, como *punto, línea, superficie, cuerpo sólido*, o el de sentar informalmente las relaciones entre los objetos geométricos de n dimensiones (línea, superficie, sólido) y los conexos de dimensiones n-1 (punto, línea, superficie respectivamente). Pero no permiten discernir, por ejemplo, el alcance de la crítica epicúrea. Las conjeturas a este respecto han llegado a sugerir la existencia de una especie de geometría epicúrea no euclídea, fundada en el rechazo de la bisecabilidad o divisibilidad indefinida [*eis ápeiron tomé*, vid. Epicuro: *Carta a Heródoto*, § 55] y en la asunción de indivisibles —dentro de una tradición que según Proclo (*In I Euc. Comm.*, 279.5) se remontaría hasta Jenócrates. Pero incluso los defensores de esa presunción han de confesar (e.g. J. Mau) que esta geometría alternativa atomista no está documentada. Cfr. aspectos de la discusión en G. Vlastos (1966): «Zeno of Sidon as a critic of Euclid», l.c.; J. Mau: «Was there a special Epicurean mathematics?», *Phronesis*, Suppl. 1 (1979), pp. 421-30; M. Gigante: *Scetticismo e epicureismo*, Napoli, 1981, c. 6, pp. 209-214; I. Mueller (1981): «Geometry and scepticism», l.c. A mi juicio, lo más que cabe aventurar es que el «espectro» epicúreo abarca desde críticas radicales de la geometría deductiva hasta críticas metodológicas de los *Elementos* de Euclides (como parecen haber sido las de Zenón de Sidón) y, en todo caso, envuelve posturas tan diversas como las de Polyeno y Demetrio de Laconia (que viene a responder a las aporías esgrimidas por Polyeno, aunque tampoco es seguro que éstas fueran cabalmente antigeométricas).

aun en el seno de la tradición matemática sobre puntos particulares —alguno tan capital como la identificación de los axiomas suficientes y necesarios, o como la índole de un postulado—, ni el empleo de otras definiciones alternativas, ni la revisión crítica de varias pruebas euclídeas. Por ejemplo, Herón de Alejandría (s. I) no admite sino tres axiomas, corrige algunas demostraciones y renuncia al uso de la reducción al absurdo; Pappo (s. IV) explicita axiomas complementarios y otros supuestos derivables de las definiciones; Teón, el editor principal de los *Elementos,* añade alguna demostración de su propia cosecha; el mismo Proclo se suma a la tradición, presidida por Tolomeo, de los que intentan probar como un teorema el postulado euclídeo de las paralelas. En realidad, ni la matemática de más estricta observancia euclídea se privó nunca del placer de agregar lemas y puntualizaciones a los *Elementos.* Así pues, los *Elementos,* a pesar de la transfiguración institucional que les sobreviene, constituyen una contribución sustancial al desarrollo de la gran matemática helenística, son una obra estimulante dentro de una tradición viva; se convierten en un foco de atención y en una fuente pródiga de comentarios, a la vez que conviven con otras formas de hacer matemáticas (e.g. la construcción geométrica por *neusis,* i.e. con una especie de regla marcada móvil, o por medios que se decían «mecánicos»; el cálculo numérico; ciertas primicias algebraicas). Por todo ello no conviene confundir la significación disciplinaria que el tratado de Euclides pudo adquirir entonces, en el medio helenístico, con la escolarización que luego hubo de padecer al transformarse en el manual de Geometría por excelencia, aunque una y otra fueran decisivas para la preservación un tanto singular de la obra hasta nuestros días.

La verdad es que la orientación escolar y didáctica del tratado ya se insinúa con la edición *(ékdosis)* estándar de los *Elementos* que hace Teón de Alejandría en el s. IV. Sin embargo, no llega a ser perceptible hasta su conversión medieval, primero árabe y luego escolástica, en un libro de texto susceptible de simplificación a la medida de los usos que la geometría alcanzaba a tener en una y otra culturas —mucho menores al principio en la cristiana—. Esta nueva condición es la que prevalece desde el Renacimiento e, incluso, se acentúa hasta finales del siglo pasado cuando la primera «Mahts War» —digamos— acaba por desalojar a los *Elementos* de su posición hegemónica en la enseñanza media y universitaria de Francia y del Reino Unido: los motivos que a la sazón se esgrimen en defensa de

la geometría euclídea ya no tienen otra referencia que la psicopedagógica: tanto Augustus de Morgan como William Whewell, por ejemplo, aducen en su favor no razones de orden teórico o metodológico —como las de sus vindicadores clásicos, desde Posidonio hasta Saccheri, o como las que ahora cuentan en favor de quienes están vindicando el cálculo y el álgebra—, sino consideraciones pías sobre la «formación de la mente», «el ejercicio del pensamiento», «la disciplina educativa», «la gimnasia de la educación», amén de otros melindres por el estilo [12].

Las referencias obligadas a la fortuna histórica e institucional del epónimo «Euclides» pueden inducir a un postrer equívoco que conviene despejar. Se trata, por lo demás, de un mal entendido común: consiste en creer que los *Elementos,* debido precisamente a su identificación con una disciplina normalizada, son un tratado más o menos homogéneo pero tan autosuficiente y encerrado en sí mismo que ha hecho desaparecer justamente todo rastro de la tradición matemática anterior. La ausencia de *Elementos* anteriores favorece esta impresión. Pero sólo puede ser, tras una mirada a la obra misma de Euclides, una impresión aparente y superficial. Como ha sentenciado Knorr (1975): *The Evolution of the Euclidean Elements,* o.c., pag. 312.: «Más justo es concluir que lejos de condenar esos tratados-fuente a la extinción la síntesis de Euclides contribuyó a su supervivencia. Lo único que uno podría desear es que las demás ramas de la matemática clásica, y en particular la aritmética, hubieran tenido compiladores de igual capacidad». Ni Euclides es por una parte un rígido profesor, un oscuro colega que se limita a administrar docencia sin la menor punta de investigación, ni por otra parte su composición de los *Elementos* erige una obra marmórea esculpida en un solo bloque, exenta.

En lo que sigue nos atendremos a la constitución interna de los *Elementos* para hacernos una idea ponderada y equitativa a este respecto y, más aún, para formarnos una idea general del grado de sistematización que el tratado, en su conjunto, manifiesta. Adelanto que la obra, cuando es contemplada en una visión panorámica, se asemeja más que nada a una vieja catedral en cuya construcción —aunque esté presidida por un plan arquitectónico deliberadamente integrador— se han entremezclado materiales y estilos de diversas

---

[12] Vid. D. Gjertsen (1984): *The Classics of Science,* o.c., 3, pp. 45-9; Heath (1926 [2]), edic. c., 1, cc. V y VIII en especial, pp. 46-63 y 91-111.

épocas, a los que luego se han venido a añadir arreglos posteriores y alguna que otra restauración moderna.

La fuente básica de difusión del texto hasta el s. XIX fue la edición citada de Teón de Alejandría, de la que parten distintos brazales de copias medievales y renacentistas. Al margen de las contingencias propias de estos procesos de transmisión que van vertiendo copias sobre copias, la edición de Teón ya contenía algunas alteraciones del presunto original, según se ha podido apreciar a la luz de un manuscrito anterior o independiente hallado por Peyrard a principios del s. XIX entre los que Napoleón se había traído a París de la Biblioteca Vaticana. Esas alteraciones incluían correcciones de errores, enmiendas lingüísticas y estilíticas, adiciones que venían a suplementar o explicar el original —alguna reconocida por el propio Teón— y omisiones. El trabajo de depuración y restauración, que ya inicia Simson a mediados del s. XVIII, culmina con la edición de Heiberg y Menge (Leizpig, 1883-1916) revisada por Stamatis (Leipzig, 1969-1977). Pero, en el curso de esta labor crítica, también se han detectado interpolaciones anteriores a la edición estándar de Teón (pruebas alternativas introducidas con la intención de facilitar o abreviar la demostración, lemas, porismas o corolarios, escolios o glosas marginales). No obstante, los *Elementos*, con ser tras la Biblia —como suele decirse— el texto más frecuentado por copias, ediciones y versiones (no tanto en español, idioma hecho según el emperador Carlos a otros más altos fines de la comunicación), ha sido una de las obras clásicas más y mejor contrastadas. Así que la conformación un tanto heterogénea e irregular que presenta el tratado de Euclides, a pesar de su voluntad de orden y de sistema, debemos achacarla no a las circunstancias históricas de su preservación y transmisión sino, ante todo, a las condiciones primigenias de su confección en los albores de la matemática helenística.

2.3 *La constitución de los Elementos. (I) El pórtico* «axiomático».

Los *Elementos*, en la versión que hoy se considera establecida, comprenden 132 definiciones, 5 postulados, 6 nociones comunes o axiomas y 465 proposiciones dentro de 13 libros [13].

---

[13] Me refiero a la edic. revisada por E. Stamatis en 4 vols. (1967-1973) más otro, V (1977), con los escolios a I-V. Aprovecho la erudición de Heath (1926^2) en la

A pesar de su vocación goemétrica, el tratado alberga diversos cuerpos temáticos de la matemática elemental y métodos varios. Entre esos cuerpos cabe mencionar la teoría de la geometría plana (libros I-IV) y de la geometría del espacio (XI-XIII), la teoría aritmética (VII-IX), la teoría general de la proporción (V-VI). En cuanto a los métodos se suelen distinguir el procedimiento elemental de construcción por «regla y compás (colapsable)», el procedimiento de aplicación de áreas —que modernamente ha recibido el equívoco nombre de «álgebra geométrica»—, el procedimiento fundado en el principio de continuidad (V def. 4) y en el lema de bisección (X 1) —que también se ha visto tildado posteriormente de «método de exhausción».

Lo que tradicionalmente ha llamado más la atención de los observadores *methodologically minded*, es la portada «axiomática» con la que se abre el libro I y a la que se supone el pórtico de la gloria de la geometría euclídea. Por seguir esta vieja —y no sé si fea— costumbre de destacarla, me detendré primero en su contemplación y luego, en una segunda parte, pasaré a considerar el contenido de cada uno de los libros desde el punto de vista de su significación metodológica, sistemática y deductiva.

Como es sabido, el libro I empieza sin miramiento alguno con una serie de definiciones *[hóroi]* del tenor de las siguientes:

1. Un punto *[semeîon]* es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos *[pérata]* de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquélla que yace por igual *[ex ísou ... keîtai]* respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura. <...>

15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto interior son iguales entre sí.

---

edición citada, así como la versión española en preparación de M.ª L. Puertas que, según mis noticias, será la primera traducción completa que verá la luz en castellano (Madrid, 1991 ss.). Entre los comentadores árabes se extendió la especie de que había que añadir otros dos libros, el XIV y XV; ambos complementan el estudio de los sólidos regulares contenido en el libro XIII, siendo el XIV obra posiblemente de Hypsicles —un discípulo alejandrino de Euclides—, superior en calidad y claridad al XV (vid. Heath (1926^{2}), 3, Appendix, pp. 512-520); están recogidos en Stamatis, edic. c., (1977), V.

16. Y el punto se llama centro del círculo <...>
23. Rectas paralelas son aquellas rectas que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente *[eis ápeiron]* en ambos sentidos *[mére]*, no se encuentran una a otra en ninguno de los dos sentidos.

El punto había sido definido en medios pitagóricos como «unidad *[mónas]* con posición» (Aristóteles: *De An.* I, 4 409a6; *Metaphys.* Δ 7, 1016b 24), y como «extremidad de una línea» (*Top.* VI 4, 141b21). El propio Aristóteles había precisado que el punto es algo sustancialmente indivisible y provisto de posición, pero no es parte de la línea ni la línea se compone de puntos —bien que, por movimiento, un punto pueda generar una línea y ser únicamente así origen de una magnitud (*De An.* I 4, 409a4)—: es semejante al «ahora», un instante divisible que no forma parte del tiempo y se limita a marcar el comienzo, el final o una división en el tiempo (*Phys.* IV 11, 220a1-21). El paradigma de esta concepción de las unidades de magnitud puede ser la idea de unidad que recoge la definición 1 del libro VII, cuando Euclides sienta la base tradicional de la aritmética: «la unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es una». (Aristóteles también da cuenta de una definición de la unidad, recíproca de la def. 1 de los *Elementos,* como «punto sin posición» en *Metaphys.* M 8, 1084b26). Esa concepción puede haber surgido como una respuesta filosófica a los problemas suscitados por el análisis eleático de la divisibilidad indefinida, según se desprende de algunas referencias de Platón (e.g., *Rep.* VII 524e-5266a) y de Aristóteles. Euclides se hace eco de esta concepción y sustituye el término aristotélico usual «*stigmé* (punción que produce un objeto puntiagudo)» por un término más abstracto, «*semeîon*», que no es ajeno a la tradición matemática y designa una marca convencional. Las definiciones 2 y 5 dan señales más claras aún de la conformidad de Euclides con ciertas nociones anteriores y con su formulación aristotélica; son nociones de raíz platónica y se mueven en un contexto general como el que Aristóteles expresa en la *Metafísica:* «Así pues, lo completamente indivisible según la cantidad y carente de posición se llama unidad, y cuando es completamente indivisible con posición se llama *punto;* lo divisible de una sola manera se llama *línea;* lo divisible de dos maneras, *superficie,* y lo divisible de las tres maneras, *cuerpo*». (*Metaphys.* Δ 7, 1016b24-28); así se introducen las dimensiones. La def. 3 relaciona los puntos con las líneas y su número de orden parece prevenir una objeción aristotélica contra

una definición del punto en estos mismos términos que, de ser la primera o inicial, equivaldría a explicar lo anterior (el punto) por lo posterior (la línea). La def. 4 es probablemente original de Euclides: la noción habitual de línea recta venía siendo la dada por Platón en el *Parménides* (137e): la que tiene el medio delante de los extremos de modo que la visión del medio nos impide ver los extremos; Euclides opta por una variante que soslaya esa referencia a la vista o a unas circunstancias de visibilidad. En cambio, la def. 15 responde al criterio de equidistancia que Platón utiliza en el mismo pasaje del *Parménides* (137e) para determinar la noción de lo redondo o circular; Euclides añade la precisión de que el punto equidistante, el *centro*, es un punto interior, i.e. un punto que se encuentra en el mismo plano del círculo; al igual que la def. 2 de línea, esta definición de círculo es estática y no es genética, no envuelve una condición de generación como la que establece Herón (def. 27: un círculo es la figura descrita cuando una línea recta, manteniéndose en el mismo plano, se mueve sobre uno de sus extremos tomado como punto fijo hasta retornar a su posición inicial). La def. 23 declara una noción de paralela ya conocida por Aristóteles, quien estaba familiarizado incluso con algunas implicaciones de la teoría en curso sobre las paralelas, e.g. con el resultado de que la suma de los ángulos de un triángulo no es mayor que dos ángulos rectos (*APr.* II 17, 66a11-15). Pero, en este contexto, es significativa la opción de Euclides por el criterio de no intersección —no encuentro— de las paralelas, frente a otras caracterizaciones posibles como la fundada en la equidistancia (preferida por Posidonio, Gémino, Simplicio) o la derivada de un criterio de igual dirección (adoptada por Filopón); el criterio euclídeo y la explicitación ulterior de un postulado congruente con su empleo efectivo evitan la caída en ciertas peticiones de principio comunes en la discusión de las paralelas (vid. la alusión del propio Aristóteles en *APr.* II 16, 65a4-5) [14].

Euclides presenta a continuación 5 postulados *[aitémata]:*

---

[14] Heath (1926²), edic. c., 1, pp. 190-4, da una visión general de la discusión sobre las paralelas y de los planteamientos de esta noción; más adelante, en las pp. 204 ss., Heath da cuenta de los intentos de derivar el criterio euclídeo. Por lo demás, un erudito húngaro, Imre Tóth, ha querido adivinar con más ganas que fortuna algún precedente heleno de una alternativa no euclídea fundada en el descarte mismo de esta teoría de los *Elementos.* Cf. la discusión de G. J. Kayas: «Aristote et les géométries non-euclidiennes avant et après Euclide», *Revue des Questions Scientifiques,* 147 (1976), pp. 175-194, 281-301, 457-465.

(i) el de trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto;
(ii) el de prolongar una recta finita *[peperasménen]* continuamente como una recta;
(iii) el de describir un círculo con cualquier centro y distancia;
(iv) el de que todos los ángulos rectos son iguales entre sí;
(v) el de que si una línea recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si son prolongadas indefinidamente, se encontrarán por el lado en el que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.

El postulado (i) demanda la construcción efectiva de la línea recta una vez conocida su definición, mientras que la realidad o existencia del punto se da tácitamente por descontada. Euclides también omite la implicación de que la línea trazada entre dos puntos es única (de modo que si dos líneas rectas coinciden en los mismos extremos coinciden cabalmente en toda su longitud), aunque luego venga a suponerla en la prueba de proposición I 4 (que establece las condiciones de la igualdad entre triángulos). De hecho, varios editores corregirán luego esta omisión interpolando como postulado o como noción común la asunción equivalente de que dos rectas no encierran un espacio (como última noción común figura en Stamatis (1969), I, p. 6). El postulado (ii) también puede entenderse, parejamente al (i), en el sentido de que un segmento rectilíneo sólo puede prolongarse de una única manera por cada extremo y, por ende, dos líneas rectas no pueden tener un segmento común. Una de las críticas del epícureo Zenón de Sidón a Euclides fue precisamente la no explicitación de este supuesto en la prueba de I 1; con mayor razón cabría denunciar su ausencia en la prueba de I 4,; mucho más adelante, en la prueba de XI 1, aparecerá asumido de modo expreso e inopinado. El postulado (iii) es a la definición del círculo lo que el postulado (i) era a la definición de la recta: demanda su construcción efectiva una vez que se cuenta con la noción correspondiente. No estará de más anotar que los griegos carecen de un término para designar el radio y utilizan en su lugar las paráfrasis «distancia desde el centro» o «recta trazada a partir del centro». Suele pensarse que este postulado —así como el anterior— envuelve la idea de un espacio continuo e infinito: al no indicar ninguna restricción del tamaño del círculo descrito, éste puede ser indefinidamente pequeño

en un espacio continuo —con una distancia mínima entre los puntos contiguos— o puede ser indefinidamente grande, i.e. infinito; este segundo supuesto parece necesario para establecer la verdad universal del teorema I 16. Creo que resulta muy aventurado atribuir a Euclides la intención de fijar, mediante tales postulados, las propiedades características o estructurales del espacio que hoy calificamos de «euclidiano». Sea como fuere, lo que sí hacen los postulados (i)-(iii) es sentar las bases operativas de un procedimiento de construcción por medio de regla y compás: con la regla se trazan rectas, con el compás se describen círculos; el compás se colapsa cuando se levantan sus dos pies, de modo que no sirve para transportar segmentos; pero la solución de los problemas I 1-3 muestra que este recurso es innecesario y esos postulados se bastan para trasladar segmentos determinados (cfr. el planteamiento de Hilbert (1899): *Grundlagen der Geometrie*, VII § 36).

El postulado (iv) parece pertenecer de entrada a una clase de asunciones diferente de la representada por (i)-(iii). Proclo recuerda que Gémino situaba este aserto entre las nociones comunes o axiomas pues no postula unas posibilidades de construcción, sino que establece una propiedad esencial de los ángulos rectos: la de ser una magnitud determinada capaz de representar un patrón invariable para medir los demás tipos de ángulos. Proclo añade por su cuenta y riesgo que no es un postulado en el sentido aristotélico; luego da a entender que posee un carácter axiomático; y por último declara estar en condiciones de probarlo si alguien se lo pidiera. Lo cierto es que los mss. que se derivan de la edición de Teón suelen situarlo con las nociones comunes o axiomas. Su aplicación comporta la suposición de unas figuras invariables y esto significa, a nuestros ojos, suponer que el espacio en general es homogéneo; de ahí que este supuesto de uniformidad o isotropía se considere hoy equivalente al postulado (iv). Pero, según todos los visos, Euclides piensa una vez más en una propiedad básica de un objeto geométrico antes que en una condición estructural del espacio.

El postulado (v) también resulta un tanto peculiar. Por una parte, se asemeja a los postulados operativos (i)-(iii) al demandar, aparentemente, la existencia de puntos de intersección o encuentro de rectas con rectas. Por otra parte, completa el criterio de paralelismo avanzado en la definición de las rectas paralelas. En tercer lugar y sobre todo, no goza de la evidencia inmediata que aureola los demás principios geométricos. Atengámonos una vez más a Proclo (*In I*

Eucl. Comm., 191.21 ss.): «Debe ser borrado por completo de entre los postulados, porque se trata de un teorema henchido de dificultades que Tolomeo se propuso resolver en un libro, y requiere para su demostración varias definiciones y teoremas. Más aún: la proposición conversa es efectivamente demostrada por Euclides como un teorema». (Proclo parece aludir al teorema I 17: la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos rectos, pues el postulado (v) equivale a decir que las rectas, al llegar a encontrarse por el lado en el que están los ángulos cuya suma es menor que dos ángulos rectos, formarán un triángulo). «En el caso presente —continúa diciendo un poco más adelante—, el hecho de que las rectas convergen cuando los ángulos rectos son minorados, es cierto y necesario; empero la afirmación de que como convergen más y más a medida que se prolongan, llegarán alguna vez a encontrarse, es una afirmación plausible pero no es necesaria a falta de un argumento que pruebe que esto es verdad en el caso de las líneas rectas. Pues el hecho de que haya algunas líneas que se aproximan indefinidamente pero permanecen sin tocarse *[asýmptotoi, asíntotas]*, por más que parezca improbable y extraño, es cierto y está completamente comprobado en relación con líneas de otro tipo. ¿Por qué en el caso de las rectas no es posible lo mismo que ocurre con las líneas mentadas?»

La larga historia de los intentos fallidos de apear de su pedestal el postulado euclídeo de las paralelas es la más popular de todas cuantas se refieren al desarrollo de las matemáticas. Comprende intentos de deducción directa y ensayos de demostración indirecta por medio de la reducción al absurdo de proposiciones equivalentes a la negación del postulado, y los fracasos sucesivos han ido precipitando una serie de formulaciones parejas al asediado pero incolúme postulado (v) —i.e. han ido explicitando supuestos deductivamente equipolentes en el seno de los *Elementos* o, más en general, en el seno de la «geometría euclidiana»— [15]. Desde luego esta historia es su-

[15] Conviene distinguir entre la geometría euclídea, los *Elementos*, y los posteriores desarrollos y reconstrucciones que han dado lugar a la geometría euclidiana. La literatura generada por el largo proceso de discusión del postulado (v) y su desembocadura en la identificación y clasificación de diversas variantes geométricas (neutrales, euclidianas, no euclidianas), es tan extensa que ya al cumplirse la 1.ª década de este siglo pudo confeccionarse un catálogo bibliográfico especializado como el de D. Sommerville: *Bibliography of non-Euclidean Geometry*, London, 1911. Una selección de textos relevantes se encuentra en G. G. Granger: *Introduction à l'histoire des*

mamente significativa no sólo por lo que toca a la suerte de la geometría clásica, sino por la repercusión general de su desenlace en la segunda mitad del s. XIX: sus secuelas se han hecho sentir tanto en la filosofía de la matemática (e.g. en el replanteamiento del problema de las relaciones entre las construcciones geométricas y el mundo físico o el espacio natural), como en la metodología de las ciencias deductivas al abrir la perspectiva de las geometrías no euclídeas y colar de rondón el horizonte de una investigación metageométrica. Por desgracia, no es ahora el momento de ocuparse de esta compleja y edificante historia. Pero tampoco estará de más un apunte para ilustrar el sentido de la opción de Euclides por la definición 23 y por el postulado (v) en el marco helenístico del asunto de las paralelas.

El criterio de paralelismo más intuitivo y familiar en la cultura matemática de entonces era seguramente el de equidistancia (ya he sugerido que en él confía gente tan dispar como Posidonio y Gémino o, mucho más tarde, Simplicio). Desde este punto de vista cabe entender que son rectas paralelas aquellas que se mantienen equidistantes entre sí. Esta noción envuelve un criterio trivial: si dos rectas son equidistantes, son paralelas. Una proposición más interesante y operativa es la conversa: si dos rectas son paralelas, se mantendrán equidistantes y por ende nunca se encontrarán por más que sean prolongadas indefinidamente. Según esto, la opción por la equidistancia no sólo es más natural sino que además parece capaz de entrañar de suyo el criterio euclídeo. Veamos si es posible tanta felicidad.

Para empezar, contamos con un criterio obvio, a saber:

α) Si dos rectas son equidistantes entre sí, son paralelas.

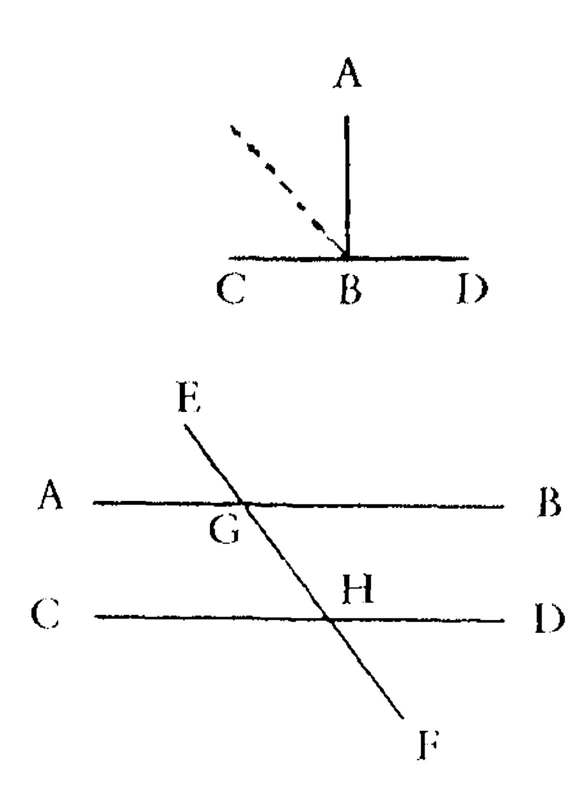
Disponemos asimismo de ciertos resultados que cabe establecer al margen del postulado de las paralelas, por ejemplo:

β) Si una recta (sea AB) levantaba sobre otra recta (sea CD) forma

---

sciences, 2. Paris, 1971; III 2, pp. 97-130; y en J. Fauvel, J. Gray, eds.: *The History of Mathematics. A Reader.* London, 1987, pp. 104, 235-239, 508-537. La referencia historiográfica clásica sigue siendo R. Bonola (1906): *Non-Euclidean Geometry: A Critical an Historical Study of its Development,* New York, 1955 (reimp. de la versión inglesa de 1911). Entre las últimas revisiones de este tema de sumo interés histórico, teórico y metodológico, son dignos de mención aunque por motivos bien distintos M. J. Greenberg: *Euclidean and non-Euclidean Geometry: Development and History,* New York, 1980; P. Freguglia (1982): *Fondamenti storici della geometria,* o.c., c. II, pp. 49-53, y c. V, pp. 233-273, especialmente; y R. J. Trudeau (1987): *The Non-Euclidean Revolution,* o.c.

ángulos, formará dos ángulos rectos o ángulos iguales a dos ángulos rectos (vid. *Elementos,* I 13);
γ) Si una recta (EF) al caer sobre dos rectas (AB, CD) hace iguales entre sí los ángulos alternos (AGH, GHD), entonces estas rectas se mantendrán equidistantes, i.e. nunca se encontrarán (vid. *Elementos,* I 27).



Con estos antecedentes, podemos buscar el criterio operativo que nos interesa a través de una proposición del tenor de:

δ) Una recta al caer sobre dos rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí.

Pues γ) da lugar a una implicación de la forma: «si una recta al caer sobre dos rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las rectas paralelas se mantendrán equidistantes», cuyo antecedente es precisamente δ); así que establecido éste, podríamos llegar por simple lógica a la conclusión deseada: «si dos rectas son paralelas, se mantendrán equidistantes». Consideremos entonces la prueba de la proposición δ), volviendo la vista a la figura antes considerada a propósito de γ).

1. Partimos de la asunción de que AB y CD son dos rectas paralelas.
2. Supongamos ahora que los ángulos alternos, AGH y GHD, no son iguales entre sí, de modo que, por ejemplo, AGH > GHD.

2. Añadamos el ángulo BGH a cada uno de ellos. Entonces —puesto que si cosas iguales se añaden a cosas desiguales, los totales son desiguales (este principio figura en algunos mss. como una noción común o axioma expreso de los *Elementos*)—, resultará que AGH+BGH $\neq$ GHD+BGH, en este caso concreto AGH+BGH > GHD+BGH.
3. Pero AGH+BGH es igual a dos ángulos rectos, en razón de β).
4. Luego, GHD+BGH sólo podrá ser menor que dos ángulos rectos.
5. Está claro entonces que AB y CD, prolongadas indefinidamente por este lado, no se mantendrán equidistantes.
6. En consecuencia, no serán paralelas.
7. Pero esta consecuencia representa un absurdo lógico al contradecir la asunción inicial.
8. La misma contradicción —y por un camino parejo— se obtendría de la suposición alternativa de que AGH < GHD.
9. Por consiguiente, siendo AB y CD dos rectas paralelas, los ángulos alternos AGH y GHD no pueden ser sino iguales entre sí.

Esta conclusión poco tiene de extraordinario —al fin y al cabo es uno de los resultados incluidos en el teorema I 29 de los *Elementos*—. Lo que sí es curioso es la manera de obtenerla. Euclides puede justificar los pasos 5 y 6 mediante su postulado (v) y su criterio de no intersección. La cuestión estriba en cómo podrá hacerlo la teoría de la equidistancia sin recurrir al postulado euclídeo o a un supuesto equivalente. A primera vista, la estrategia seguida tenía visos de ser prometedora: de 5 y 6 se desprende que si dos rectas no son equidistantes, no resultarán paralelas; luego, por implicación conversa, si son paralelas, resultarán equidistantes. Ahora bien, en todo esto anida un fallo táctico, una petición de principio; pues lo que el criterio euclídeo significa es justamente que si dos rectas son paralelas nunca se encontrarán, permanecerán equidistantes, de modo que —por ejemplo— una recta que caiga sobre ellas hará los ángulos internos del mismo lado iguales a dos ángulos rectos, según consta en el mismo teorema I 29 antes mencionado. En pocas palabras, esta prueba de δ) ya presupone en 5 y en el paso a 6 el criterio que trata de evitar. ¿Sería ésta una de las peticiones de principio que Aristóteles había denunciado a propósito de las teorías sobre paralelas que ya en el s. IV a.n.e. circulaban en algunos medios?

El pórtico de los *Elementos* se remata con una selección de nociones comunes *[koinaì énnoiai]* o axiomas de este tenor:

(i*) Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
(ii*) Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, los totales son iguales.
(iii*) Si cosas iguales se sustraen de cosas iguales, los restos son iguales.
(iv*) Las cosas que coinciden entre sí, son iguales.
(v*) El todo es mayor que la parte.

Suele considerarse que (i*)-(iii*) no sólo provienen de una tradición fielmente respetada por Euclides sino que cumplen a plena satisfacción las condiciones que la teoría aristotélica de la ciencia imponía a los *arkhaí* de este tipo, e.g. la de ser una verdad primordial e incontestable, la de tener un alcance más general que el limitado por el campo temático de una ciencia determinada. Recordemos que (iii*) es precisamente la ilustración favorita de Aristóteles cuando se refiere a esta clase de principios indemostrables. Pero es posible que los matemáticos helenísticos tuvieran algunas diferencias a este respecto: conocemos un intento de Apolonio de probar las nociones comunes o axiomas de los *Elementos* y sabemos que Proclo, revestido de severidad metodológica, desaprueba el intento como lo podría haber hecho un aristotélico ortodoxo. Proclo menciona, a título de ejemplo, la prueba que da Apolonio de la noción común (i*): las cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí (*In I Eucl. Comm.*, 194.22 ss.): Supongamos tres objetos geométricos dados A, B, C. Sea A igual a B y B igual a C. Entonces A es igual a C. Pues al ser A igual a B ocupa el mismo espacio que B; y al ser B igual a C, ocupa el mismo espacio que C. Por consiguiente, A ocupa el mismo espacio que C. Proclo observa que esta conclusión, sin derivarse de algo más inteligible o mejor conocido que ella, presupone dos cosas: que los objetos que ocupan el mismo espacio son iguales entre sí y que la relación de ocupar el mismo espacio que una misma cosa es una relación transitiva, de modo que la prueba de Apolonio resulta más oscura que la evidencia que trata de demostrar. Otro detalle desafortunado del planteamiento de Apolonio es su restricción a los objetos que pueden ocupar un lugar en el espacio, cuando la vigencia de (i*) alcanza asimismo a otras muchas cosas, como números o periodos de tiempo. Los comentadores y editores de los

Elementos fueron añadiendo luego a (i*)-(iii*) otros axiomas de igualdad geométrica.

La noción común (iv*) representa un axioma de congruencia que podría hacerse acreedor justamente al cargo recién señalado en el caso de Apolonio. Herón no reconoció su calidad de noción común y Proclo la acepta alegando que ni se deben multiplicar los axiomas innecesarios ni se deben contraer al mínimo los imprescindibles (*In I Eucl. Comm.*, 196.15-21; Herón, de hecho, sólo admitía como nociones comunes genuinas las tres primeras, i*-iii*). Es posible que se trate de una interpolación temprana. Sea como fuere, su utilización en las proposiciones I 4 o I 8 de los *Elementos* da a entender que responde al procedimiento geométrico tradicional de la superposición de figuras por desplazamiento de una y colocación sobre la otra. Este recurso, a juicio de Platón, ya descalificaba a los geómetras de su propio tiempo, pero ni antes ni después de Euclides dejó por ello de aplicarse.

La noción común (v*) también aparece en Proclo como axioma legítimo, y a la vez, discutido (e.g. por Herón). En la prueba de I 6 Euclides, ante dos triángulos determinados, aduce que si uno de ellos fuera igual al otro, «el menor <sería> igual al mayor: lo cual es imposible». Esta misma fórmula se encuentra en una obra —anterior a los *Elementos*— de Autólico de Pitania: «pues igual es el segmento ΔH al segmento ΔZ, el menor al mayor, lo cual es imposible [*íse ára estìn he* ΔH tê ΔZ, he elásson tê meídsoni, hóper estìn adýnaton]» (*De sphaera quae movetur*, prop. 3). Cabe pensar entonces, como conjetura Heath, que la noción común (v*) viene a ser una generalización de los casos de este tipo que adquiere el aspecto de una condición sobre la relación de magnitud entre un todo, o el total, y una cualquiera de sus partes propias; o se puede pensar, por el contrario, que la noción común precede a este tipo de aplicaciones particulares y responde más bien a una opción intuitiva por los conjuntos finitos que trata de sortear algunas paradojas eléaticas sobre el infinito, e.g. que el doble resulte igual a la mitad, según imagina Szabó; y, en fin, también es posible entender como hace Trudeau a la vista del uso euclidiano de las nociones de «mayor» y «menor» (por ejemplo, en la línea de las definiciones 11: «Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto»; 12: «Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto»), que el todo y una de sus partes se relacionen como figuras compuestas de modo que la mayor contenga a la menor como una parte propia (e.g. si se trata

de dos ángulos, de modo que ambos compartan el vértice y uno de los lados) [16]. Más adelante habrá ocasión de volver sobre la pretensión de Szabó de interpretar los *Elementos* como una fundamentación axiomática que procura salvar la teoría del espacio geométrico de las paradojas levantadas por Zenón de Elea. De momento, y al margen de tal presunción, podemos anotar que la noción común (v*) cuadra perfectamente con el punto de vista finito del que Euclides parte en otras proposiciones primordiales —e.g., en la definición 23 o en los postulados (ii) y (v), donde su idea de línea recta se contrae a la idea de segmento rectilíneo al que luego agrega una condición de extensibilidad indefinida—. Pero asimismo hay que reconocer que la selección de la noción común (v*), en el contexto de las relaciones de orden (mayor-que/menor-que), es mucho menos afortunada que la de los axiomas (i*)-(iii*) en el contexto de las relaciones de igualdad; (v*) no facilita, por ejemplo, la expresión de la transitividad y de otras propiedades de un orden de magnitud. De hecho, (i*)-(iii*) pronto suscitaron nuevos axiomas emparentados (e.g.: «si se añaden iguales a desiguales, los totales resultan desiguales», «si se sustraen iguales de desiguales, los totales resultan desiguales»), mientras que (v*) permaneció solitario y absorto en su propia (y aparente) evidencia.

De esta visión panorámica de las definiciones, postulados y axiomas con que se inician los *Elementos*, podemos obtener algunas conclusiones sobre las deudas y la originalidad del tratado de Euclides. De entrada, hay que notar que la tripartición en *hóroi*, *aitémata* y *koinaì énnoiai* es una contribución singular del tratado a la tradición matemática; naturalmente, en lo que concierne a los *Elementos* anteriores sólo cabe juzgar por el precario argumento del silencio; pero los tratados matemáticos coetáneos y posteriores no parecen observarla, normalmente no hacen mención expresa de las nociones comunes, y a veces reúnen las definiciones y los postulados en una categoría mixta de supuestos. A este respecto prevalece a lo largo y lo ancho de la matemática helenística un uso tan libérrimo de ciertas denominaciones presuntamente técnicas (*«axiómata»*, *«hypothéseis»*, *«aitémata»*) que sus editores han optado a veces (e.g. en el caso de Arquímedes) por emplear un término tan genérico como «*lambanómena* (asunciones)» para designar sin mayores problemas las diversas clases de supuestos (axiomas, postulados, lemas). Por si esto fuera

[16] Cfr. Heath (1926 ²), edic. c., 1, pag. 232; A. Szabó (1969, 1978), o.c., § 3.24, pp. 291-298; R. J. Trudeau (1987), o.c., pp. 35-36.

poco, abundan las discusiones y las confusiones de orden conceptual, ilustradas por algunos pasajes del comentario mismo de Proclo (e.g. 178.12-179.8; 182.6-14; 182.21-183.13) que plantea criterios dispares de demarcación entre unos principios y otros sin que ninguno de esos criterios llegue a ser realmente general y efectivo. Quizás debido a un contexto matemático tan ambiguo y, por añadidura, en razón de algunas coincidencias concretas, se tomara por fuente de inspiración o precedente de Euclides el análisis de los *arkhaí* que Aristóteles había avanzado en los *Segundos Analíticos.* De hecho, la comparación de los *Elementos* con la teoría aristotélica de la ciencia viene siendo, desde el comentario de Proclo, un tópico inevitable. Luego habrá que detenerse en la discusión de este punto. Por ahora bastará consignar tres cosas. En primer lugar, las semejanzas del presunto «plan axiomático» de los *Elementos* con el programa de los *Analíticos* no son más llamativas, precisamente, que sus diferencias mutuas. En segundo lugar, a pesar de los esfuerzos de algunos comentadores y editores tardíos (de Euclides o, para el caso, de Arquímedes) por introducir una terminología aristotélica precisa en la identificación y clasificación de los *arkhaí* matemáticos, la tradición matemática mantuvo sus vaguedades y confusiones habituales a este respecto. Y, para colmo, los *Elementos* ni observan —más allá de la mera enumeración— un criterio uniforme o inequívoco de distribución de las asunciones primeras bajo cada uno de los tres epígrafes (definiciones, postulados, nociones comunes), ni dan pie para la redistribución general y efectiva de cada uno de los casos que parecen problemáticos.

Por lo demás, es obvio que la contribución de Euclides se enmarca en una distinción básica y tradicional entre las proposiciones primordiales y las proposiciones derivadas —probadas a partir de aquéllas— que componen un núcleo o un cuerpo deductivo. Proclo recuerda el carácter obligado de esta distinción en la tradición geométrica: «Como esta ciencia de la geometría parte de hipótesis *[ex hypothéseos]* y prueba las proposiciones subsiguientes desde determinados principios... *[ap' arkhôn],* el que prepara una introducción a la geometría debe presentar por separado los principos de la ciencia y las conclusiones que se siguen de los principios sin dar razón de los principios sino únicamente de los teoremas derivados de ellos» (*In I Eucl. Comm.*, 75.6 ss.). Sin embargo, también aquí los *Elementos* euclídeos dejan su sello propio. No sabemos cuándo se produce, en la tradición de los tratados matemáticos, la transición desde

los principios particulares o nucleares, los *arkhaí* asumidos como puntos de referencia para la solución de un problema o la prueba de un resultado, hasta los principios primeros y generales, los *arkhaí* propiamente dichos de una ciencia deductiva o de una teoría demostrativa (vid. supra, § 2.1). Pero no cabe duda de que éste es un paso efectivamente dado en los *Elementos* de Euclides; y este paso comporta la organización de ciertos campos temáticos de las matemáticas como cuerpos deductivos autodeterminados o, si se quiere, como teorías deductivas.

Las deudas y la originalidad de Euclides en lo que concierne a cada una de las definiciones, postulados y nociones comunes que presiden el libro I, no se dejan precisar fácilmente en muchos casos. Para no alargar demasiado la discusión, me limitaré a esbozar un esquema de esta compleja situación con arreglo a tres tipos generales de casos: (a) nociones o asunciones que han sido importadas directamente por los *Elementos;* (b) nociones o asunciones de importación indirecta: incluyen cierta elaboración o una precisión euclídeas; (c) nociones o asunciones originales —a lo que se me alcanza— del propio Euclides. Estos tipos se pueden ilustrar con algunas muestras.

Tipo de caso	*definiciones*	*postulados*	*nociones comunes*
(a)	2, 5, 15-16		(iii*)
(b)	1, 3	(i)-(iii)	(iv*), (v*)
(c)	4, 23	(v)	

Ya he dejado antes constancia de la presencia tradicional, preeuclídea, de las definiciones 2, 5, 15-16, y de la noción común (iii*). También he mencionado la precisión terminológica que introduce Euclides en la def. 1; los postulados (i)-(iii) y las nociones comunes (iv*) y (v*) hunden sus raíces en la tradición matemática pero su formulación expresa hace notar el cuño de Euclides. Creo en fin, que la originalidad y el compromiso personal del autor de los *Elementos* han quedado asimismo de manifiesto al considerar las muestras correspondientes (las definiciones 4, 23; el postulado (v)).

Pero tal vez convenga detenerse en alguna muestra concreta. Por ejemplo, creo que los postulados (i)-(iii), como caso (b), revisten cierto interés. Von Fritz (1955: «Die ARKHAI in der griechischen Mathematik», art. c., p. 97) ha conjeturado que los postulados (ii) y

(iii) en especial fueron introducidos por Speusippo, miembro distinguido de la Academia de Platón, aunque esta conjetura tiene escaso fundamento. Sin embargo, lo que parece fuera de duda es la resolución de problemas por el procedimiento de la regla y el compás antes de Euclides. A Oenópides de Khíos, matemático del s. V a.n.e. algo mayor que su paisano Hipócrates, se le atribuyen la investigación de dos problemas recogidos por los *Elementos* (I 12: trazar una recta perpendicular a una recta infinita dada, desde un punto dado que no se encuentra en ella; I 23: construir sobre una recta y sobre un punto situado en ella un ángulo rectilíneo igual al otro ángulo rectilíneo determinado), y su solución en unos términos similares a los euclidianos, que sólo envuelven el procedimiento de regla y compás (Proclo: *In I Eucl. Comm.*, 283.7-10 y 333.5 respectivamente). La contribución de Euclides bien pudo ser entonces la explicitación efectiva de los supuestos de este viejo método en los postulados (i)-(iii) —por desgracia, no podemos saber si los *Elementos* primigenios de Hipócrates ya daban razón del método—. El alcance de esta contribución es más notorio si se repara en que estos postulados son característicos del proceder constructivo seguido por Euclides en este ámbito de la geometría plana. Su proceder nos recuerda en líneas generales la directriz aristotélica (e.g. *APo.* I 10, 76a31-36) de que, en relación con determinados objetos, hemos de asumir como principios la noción de lo que son y el hecho de que son o existen realmente, mientras que en los demás casos podremos suponer su concepto pero tendremos que demostrar su realidad efectiva (vid. supra c. 2 § 4.1). Así Euclides define por ejemplo la recta, el círculo, el triángulo equilátero, el cuadrado; postula la construcción de la recta y del círculo; prueba la construcción del triángulo equilátero (prop. I 1) o del cuadrado (I 46). Sin embargo, no deberíamos ver aquí un prurito aristotélico ni, menos aún, una clave para adivinar la noción de constructividad o de «existencia matemática», propia de los *Elementos*. Euclides también emplea procedimientos de construcción de objetos geométricos que no están cubiertos por postulados explícitos: uno es la generación de una figura plana o sólida mediante el movimiento de otra (e.g. la generación de una esfera por la rotación completa de un semicírculo sobre su diámetro); otro es el de generar figuras planas pasando un plano a través de un sólido, según acontece con las secciones cónicas; pero tales procedimientos se fundan, si acaso, en una definición como la de esfera (XI; def. 14) o la de cono (XI, def. 18). Más aún, en el ámbito

de las magnitudes en general del libro V o en el ámbito de la aritmética del libro VII, Euclides nunca se considera en la obligación de explicitar ningún postulado de «existencia». Y, en fin, hay proposiciones que se dejan leer en términos existenciales (e.g. VII 31: «todo número compuesto es medido por algún número primo»; IX 20: «los números primos son más que cualquier multitud acotada de números primos»), pero tales proposiciones vienen demostradas por reducción al absurdo y en términos que no se pueden considerar constructivos.

Con todo, los postulados (i)-(iii) muestran cierto interés metodológico por parte de Euclides y el peso de una tradición entrenada en el planteamiento de problemas geométricos. Una tradición que conocía la efectividad de un método elemental de construcción y además había tenido ocasión de reconocer sus límites. Según Pappo (*Syn.* III, 54-6; IV, 270-2), los geómetras llegaron a distinguir tres tipos de problemas: los problemas planos, en cuya solución bastaban líneas rectas y círculos; los sólidos, que suponían el uso de secciones cónicas; los lineales, que pedían curvas más complicadas como las «cuadratrices de Hippias» o las espirales de Arquímedes. Es posible que llevara su tiempo el llegar a reconocer que no todo problema sobre objetos de la geometría plana era un problema plano. Podemos reconstruir la idea de problema plano en los siguientes términos. Supongamos que **A** es un problema acerca de la construcción o la determinación de figuras pertenecientes a la geometría plana (e.g. **A** consiste en trazar un triángulo equilátero sobre una recta dada, o en la bisección de un ángulo determinado, o en construir sobre una recta dada y un punto situado en ella un ángulo rectilíneo igual a otro ángulo rectilíneo dado). Pues bien, **A** es un problema plano sólo si **A** tiene una solución efectiva por el procedimiento de la regla y el compás, i.e. mediante el simple uso de las figuras elementales —la línea recta y el círculo— o de las configuraciones compuestas por ellas. Aunque no hay datos al respecto, suele atribuirse a algunos matemáticos antiguos la pretensión de que todo problema de la geometría plana es un problema plano, y a algún miembro de la Academia platónica —si no al mismo Platón— una directriz de parsimonia en el sentido de tratar cualquier problema de la geometría plana como un problema plano. Al margen de que tales atribuciones sean bastante discutibles, esa directriz podría fundarse en las singulares propiedades de simetría de ambas figuras elementales (cualquiera de los diámetros de un círculo es un eje de simetría de la figura;

cualquier punto de una recta prolongada indefinidamente puede tomarse como un centro de simetría de la recta y cualquier perpendicular a la recta dada es un eje de simetría de esa recta). Por otra parte, la directriz vendría a descalificar el uso de medios no elementales y de procedimientos mecánicos en la investigación de problemas de geometría plana. En todo caso, el trato con problemas como la trisección del ángulo o la cuadratura del círculo revela que esas pretensiones —en el caso de haberse dado efectivamente— son insostenibles: la solución de los dos problemas mencionados exige el uso de medios más complicados, y por el método de regla y compás sólo cabe lograr series indefinidas de aproximaciones; no son problemas planos sino lineales. Sin embargo, es posible que la matemática alejandrina mantuviera hasta cierto punto una directriz de parsimonia similar y mostrara su desconfianza hacia la proliferación de curvas mixtas y raras (cuadratrices, concoides, cicloides, espirales), sobre todo si el problema planteado era soluble por medios más elementales. Algo así sugiere Pappo cuando dice que el resolver un problema plano por medios sólidos o lineales —como han hecho a veces Arquímedes o Apolonio— venía a ser «un desliz no pequeño» a los ojos de los geómetras (*Syn.* IV, 272). Desde luego, los *Elementos* no justifican este acceso de ortodoxia. Las intenciones de Euclides al explicitar los postulados no parecen doctrinales o normativas, sino más bien metódicas. Euclides procura explicar, siguiendo un cuidado plan de exposición, que si **A** es un problema plano, **A** tiene un construcción diagramática efectiva sobre la base elemental de los postulados (i)-(iii); por otro lado, al mostrar la posibilidad de restringir el método de construcción a un compás colapsable, añade un toque de elegancia al procedimiento. Lo único que se sigue de ahí es la autosuficiencia de la geometría elemental para resolver problemas planos. Con todo, esta elucidación de Euclides también revela el sustrato intuitivo que subyace en su práctica de la prueba geométrica. No es una explicitación cabal de todos los supuestos realmente involucrados en la resolución de los problemas planos. Se echa en falta, especialmente, un postulado de continuidad que asegure la existencia de puntos de intersección de las figuras elementales, las rectas y los círculos. Euclides confía en poder contar con un punto siempre que lo necesite y donde convenga. El postulado (v) permite disponer en cierto modo de puntos de intersección de rectas; pero nada se dice sobre los puntos de intersección de rectas con circunferencias o de circunferencias con circunferencias. Así pues, las representacio-

nes diagrámaticas desempeñan un papel sustancial —tan principal como el que venían teniendo a lo largo de la tradición de la resolución de problemas— en la efectividad constructiva del método de regla y compás (sin ir más lejos en la prueba de la proposición I 1, vid. infra §5.1). Y todo ello, en suma, induce a creer que la esmerada organización deductiva de su empleo en los *Elementos* depende más bien del estudio de determinados objetos geométricos y de la preocupación euclídea por una exposición cogente y ordenada que procede desde las pruebas más simples hasta las más complejas, pero poco tiene que ver con una presunta conciencia axiomática que empieza declarando el espacio geométrico de referencia y el conjunto de las operaciones que determinan las condiciones de posibilidad de los objetos dentro de dicho espacio, sus propiedades y sus relaciones mutuas. Si esta impresión fuera correcta, los defectos de la «axiomatización» euclídea no se deberían tanto a unas imperfecciones más o menos eventuales —e.g. a la existencia de huecos tácitos o de olvidos— como, sobre todo, a la falta de una perspectiva axiomática propiamente dicha. Para recabar más elementos de juicio y obtener mayores precisiones, sigamos adelante. Consideremos ahora el contenido temático desarrollado en los libros que componen el tratado.

2.4 La constitución de los *Elementos*. (II) Libros y «teorías».

Este breve repaso al contenido de los trece libros de los *Elementos* estará dirigido no a poner de relieve su significación matemática sino más bien su significación metodológica, en línea con el propósito específico de estudiar la contribución del tratado de Euclides al desarrollo de la tradición matemática de la prueba. Puede ser útil la convención de agrupar estos libros en «teorías»: A, teoría elemental de la geometría plana; B, teoría generalizada de la proporción; C, aritmética; E, geometría del espacio; antes de llegar a ésta última nos encontraremos con un libro singular, el libro X, al que reservaré un apartado propio, D.

A.

El libro I contiene, además de las definiciones, postulados y nociones comunes que ya hemos visto, 48 proposiciones de las que 14

son problemas y 34 son teoremas. En general, los problemas entrañan la construcción de un objeto geométrico y suelen rematarse con la frase formularia: «que es lo que había que hacer»; los términos establecen propiedades y relaciones de los objetos matemáticos disponibles y suelen rematarse con la fórmula: «que es lo que había de demostrar». Las proposiciones I 1-26 versan principalmente sobre triángulos; representan una especie de entrenamiento en el método de la regla (no marcada) y el compás (colapsable). Las proposiciones I 27-32 desarrollan la teoría euclídea de las paralelas: I 32 establece precisamente que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Pero antes de I 27, donde Euclides recurre por primera vez el postulado (v), ya se han dado pasos en esta dirección: I 12 sienta la posibilidad de trazar una perpendicular a una recta dada desde un punto exterior a ella; I 16 dice que, en todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior será mayor que cualquiera de los ángulos internos y opuestos —Euclides da por supuesto que esa prolongación puede ser infinita—; I 17 dice que, en todo triángulo, la suma de dos ángulos cualesquiera es menor que dos rectos. De todo esto resulta, como corolario explicitado por Proclo, la unicidad de la perpendicular: desde un punto exterior a una recta no es posible más que una perpendicular a ella. Este camino conduce a una versión familiar del postulado euclídeo: por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela, —siempre sobre el supuesto de prolongabilidad infinita señalado antes—. I 28 da un criterio del paralelismo euclídeo: si una recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos rectos, dichas rectas serán paralelas. I 29 da un criterio complementario: si una recta cae sobre dos rectas paralelas, hace los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos rectos. Tomemos I 17 en el contexto de una recta que cae sobre otras dos rectas de modo que revista la forma 'si α, β': «si la recta al caer forma un triángulo, los ángulos internos del mismo lado sumarán menos que dos rectos». Puede considerarse entonces I 28 como un condicional contrapuesto de la forma 'si no-β, no-α'; es sintomático que Euclides pruebe I 28 en razón de I 27 pero, en último término, se remita a I 16 y a la def. 23. El postulado (v), en este mismo contexto, viene a ser el condicional converso de I 17, 'si β, α': «si la recta al caer hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, formará un triángulo». Y, en fin, I 29 resulta su condicional contrapuesto: 'si no-α, no-β'; también es de notar que la prueba de I 29 descansa sustan-

cialmente en el postulado (v). Llegamos así al núcleo de una teoría de las paralelas formado por el siguiente cuadro de relaciones de implicación:

I 17: $\alpha \rightarrow \beta$, de donde, por contraposición, I 28: no-$\beta \rightarrow$ no-α;

post. (v): $\beta \rightarrow \alpha$, de donde, por contraposición, I 29: no-$\alpha \rightarrow$ no-β.

I 17 es, en principio, lógicamente independiente del postulado (v) y, por ende, podría tomarse como una proposición perteneciente a una teoría neutral de las paralelas, y no precisamente a una teoría euclídea (o euclidiana) si por tal entendemos la fundada en el postulado (v). Ahora bien, un criterio que sí distingue esta teoría es el teorema I 28 que, también en principio, se sigue formalmente de I 17 —aunque de ello no dan cuenta los *Elementos*—. Cabe sospechar entonces que la proposición I 17, aunque se prueba antes y con independencia del postulado euclídeo de las paralelas, no es tan neutral como parece y se halla marcada: la marca euclídea reside en un supuesto tácito que incluyen en su prueba la mención del postulado (ii) y el empleo de I 16, a saber: el supuesto de que una recta dada puede recibir una prolongación infinita (I 16 no sería una proposición universalmente vigente en un espacio indefinido, sin fin pero no infinito).

Las proposiciones restantes se aplican a la determinación de áreas de paralelogramos, triángulos y cuadrados; van preparando una métrica de la geometría plana que culmina en los resultados I 45, I 47-48 y II 14. Importa señalar que en I 35, donde se establecen las condiciones de la igualdad entre paralelogramos, los *Elementos* introducen subrepticiamente una noción nueva de igualdad. Hasta entonces, la igualdad se venía entendiendo como coincidencia de formas y figuras, en el sentido de *congruencia* geométrica; a partir de I 35 también se entenderá como igualdad de contenidos o de áreas, i.e. como *equivalencia* (en términos de A.M. Legendre). En I 44 («Aplicar a una recta dada, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado»), Euclides empieza a emplear el procedimiento geométrico tradicional griego de la aplicación y transformación de áreas [17]. I 45 prueba la construcción en un ángulo rectilíneo de un paralelogramo equivalente al área de una figura rec-

---

[17] Sobre la aplicación y transformación de áreas, vid. las referencias dadas por Heath (1926 [2]), edic. c., 1, pp. 343-5, 346-7, 372-4. Otros detalles de interés pueden verse en T. Sato (1987), art. c., pp. 90-114 en especial.

tilínea dada y sienta así la condición de la posibilidad de representar cualquier área rectilínea como un rectángulo. Más adelante, en II 14, sentará esta misma condición para el otro tipo de paralelogramo que se consideraba básico, el cuadrado. I 47 prepara el camino mostrando la expresión de la suma de dos cuadrados como un cuadrado. I 47 es una versión elemental del celebrado teorema de Pitágoras; la prueba, original a todas luces, discurre al margen de la teoría de la proporción y del recurso a la semejanza de triángulos; el carácter elemental de I 47 y de su converso, I 48, convierte ambos teoremas en un broche de oro del libro I desde el punto de vista disciplinario; son una viva muestra de la capacidad de Euclides para dominar por medios relativamente sencillos buena parte de la tradición geométrica antigua. Desde un punto de vista teórico tienen menos importancia en la medida en que la teoría de la proporcionalidad del libro V permite establecer un teorema de alcance más general (VI 31); pero ello también contribuye a que la opción metódica de Euclides por un desarrollo inicial en términos elementales de la aplicación y transformación de áreas sea tanto más significativa. El libro I, en su conjunto, es uno de los más logrados tanto en la perspectiva «axiomática» de su organización deductiva —y no sólo en razón del afamado atrio de sus definiciones, postulados y axiomas, sino también en razón de su propia cohesión interna—, como en la perspectiva disciplinaria de una introducción progresiva en los métodos elementales de la geometría plana. Revela además la capacidad de Euclides para reconstruir sistemáticamente un legado antiguo y forjar nuevas pruebas que se adecuen a esta reconstrucción.

El libro II consta de 14 proposiciones, 2 de ellas problemas y las otras 12 teoremas. En realidad parece recoger un núcleo formado por problemas antiguos aunque sean tratados a modo de teoremas, y esto da al libro un aire de miscelánea dirigida a ilustrar el alcance del desarrollo elemental de la aplicación de áreas. Por ejemplo, II 11 da una solución necesaria para la inscripción de un pentágono regular en un círculo (la cual tendrá lugar en IV 10-11), y es un problema paralelo al de cortar un segmento en razón media y extrema que ha de resolverse en el marco de la teoría de la proporción (VI 30); 12 y 13 suplementan I 47 y completan la teoría de las relaciones entre los cuadrados de los lados de cualquier triángulo, sean rectangulares o no; II 14, la construcción de un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada, es una especie de culminación de este método elemental de la aplicación de áreas.

La aplicación de áreas suele recibir en nuestro tiempo la denominación de «álgebra geométrica» de los griegos o entenderse como una suerte de geometría algebraica. Un rectángulo corresponde al producto de dos magnitudes en álgebra, de modo que en la aplicación a una recta dada de un rectángulo o de un cuadrado equivalentes a un área determinada podemos ver la contrapartida geométrica de la división algebraica de un producto de dos cantidades por una tercera. La adición y sustracción de productos se traduce asimismo en la adición y sustracción de rectángulos o cuadrados. La extracción de una raíz cuadrada se vierte, en fin, por el hallazgo de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado, i.e. por lo logrado en II 14 con ayuda de I 47. Así pues, cabe leer varios resultados de II en términos algebraicos. E.g.: el teorema II 1 (si hay dos rectas y una de ellas es cortada en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo contenido por las dos rectas es equivalente a los rectángulos contenidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos), se corresponde con la propiedad distributiva de la multiplicación: $x(y+z+w+...) = (xy)+(xz)+(xw)+...$; el teorema II 4 (si una recta es cortada en un punto cualquiera, el cuadrado levantado sobre toda ella equivale a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ellos), se corresponde con la ecuación: $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$; etc. Las correspondencias de este tipo pueden cubrir la mayor parte de las proposiciones del libro II. La denominación de «álgebra geométrica» fue introducida al parecer por Zeuthen a finales del siglo pasado y todavía conserva cierta ambigüedad. Puede significar tesis diversas, entre las que destacan dos: a/ la tesis histórica de que el álgebra geométrica de los griegos es una traducción de los métodos algebraicos babilonios; b/ la tesis hermenéutica de que consiste en una geometría algebraica, cuyas líneas y áreas representan cantidades cualesquiera [18]. Ambas tesis se refieren no

[18] La tesis b/ procede de H. G. Zeuthen: *Die lehre von den Kegelschnitten in Alertum* (Copenhagen, 1896) y luego ha perdurado en estado de solución en algunas Historias de las matemáticas (vid. por ejemplo B. L. van der Waerden (1950, 1954): *Science Awakening*, edic. c., pp. 124, 171). La tesis a/ se debe a una sostenida línea de investigación de O. Neugebauer desde su clásico: «Zur geometrischen algebra», *Quellen und Studien zur Beschichte der Mathen, Astron. u. Phys.*, Abt. B 3 (1936), pp. 245-259, hasta revisiones posteriores como : «The survival of Babylonian methods in the exact sciences of antiquity and the middle ages», *Proc. Amer. Philos. Soc.*, 107 (1963), pp. 528-535; vid. también su (1952, 1957): *The Exact Sciences in Antiquity*, edic. c., vi, pp. 145-52 en especial. La discusión se ha reavivado merced a las inter-

sólo a la aplicación de áreas elemental del libro II sino a la aplicación de áreas derivada de la teoría de la proporción del libro V.

La tesis a/ puede tener distinto alcance según considere el caso de la tradición geométrica griega en general o casos particulares como el de Herón de Alejandría. Herón emplea un método «algebraico» en las pruebas de II 2-10 como consecuencias de II 1 que no requieren el uso de figuras sino simplemente el trazo de una línea y, por otro lado, sus planteamientos bien pueden ser, en general, una forma helenística de asumir el legado de la matemática mesopotámica, con la que coinciden en la manera de abordar los problemas y de resolverlos mediante ejemplos numéricos concretos. Pero el caso de la geometría griega tradicional ya es otro cantar. Por un lado, esta tradición conlleva un sentido de la demostración ajeno a las pruebas de los babilonios. Además, un influjo específicamente babilonio sobre ella presupone una difusión de la matemática oriental en Grecia desde finales del s. V a.n.e. y a lo largo del IV a.n.e. antes de la beligerancia macedonia contra el imperio persa, difusión que no es fácil precisar y, menos aún, documentar; y sin mayores luces, ¿cómo apreciaremos si este influjo en particular tuvo lugar antes de Euclides (como la transmisión del gnomon) o después (como la asimilación tolemaica del sistema sexagesimal)? En fin, la conjetura de una influencia babilonia directa debe justificarse frente a otras opciones posibles: la hipótesis de que por entonces circulaban algunos conocimientos matemáticos relativamente compartidos o esparcidos por esta transitada zona del mediterráneo oriental —donde ya se habían relacionado desde antiguo los jonios (Tales, Pitágoras, Oenópides) y los egipcios—; la hipótesis de una invención griega independiente —según Eudemo (Proclo: *In I Eucl. Comm.*, 419.15), la aplicación de áreas fue un «descubrimiento de la Musa de los Pitagóricos»—. Quizás debido a nuestra escasez de datos, ninguna de estas posibilidades se ve desmentida por la coincidencia entre el estilo algebraico de los babilonios y el método geométrico de los griegos en la obtención de determinados resultados —la coincidencia podría extenderse en algún caso (e.g. el del «teorema de Pitágoras») a la mate-

---

venciones provocadoras de S. Unguru: «On the need to rewrite the history of Greek mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, 15 (1975), pp. 67-114, y «History of ancient Mathematics. Some reflections on the state of the art», *Isis*, 70 (1979), pp. 555-565. Hay acotaciones juiciosas en I. Mueller (1981), o.c., pp. 42-44, 50-52, y en J. L. Berggren (1984), art. c., pp. 397-8.

mática india para encontrarnos con una indeterminación de «influencias» análoga. Con todo, es mérito de la tesis a/ el llamar la atención sobre los motivos operativos y el interés por el cálculo que subyacen en algunos desarrollos geométricos griegos.

La tesis b/ es, a mi juicio, mucho menos afortunada. En principio, la interpretación algebraica conlleva la abstracción estructural de unas leyes o condiciones operacionales que pueden cumplirse en diversos dominios de objetos; pero esta concepción estructural resulta ajena a Euclides quien no sólo duplica la aplicación de áreas, en los libros II y VI, por razones metódicas o disciplinarias, sino que en otros casos que también se prestan a generalizaciones de corte similar (como en el caso de los conceptos de magnitud y número) tampoco da paso alguno en tal sentido estructural. Lo más que cabe atribuir a la tradición de la que se hace eco Euclides es una percepción de las analogías geométrico-numéricas, analogías que pueden resultar en parte positivas, en parte negativas, y median entre objetos distintos o, al menos, caracterizables por separado. Por otra parte, en II no hay ecuación alguna sino la exposición de unos resultados deductivamente inconexos entre sí; baste reparar en que, una vez probada la distributividad de la multiplicación (II 1), dicha propiedad desaparece de escena y las pruebas de otras propiedades como la conmutatividad o la asociatividad aparecen distanciadas en otros libros de los *Elementos*. Resumiendo, la impresión que produce el libro II es la expresada por Heath (1926[2], edic. c., 1, p. 377): el propósito de Euclides es ilustrar el método de la aplicación de áreas y, en esta perspectiva, su proceder es más instructivo que el «algebraico» —o que algún otro similar efectivamente disponible—, pues en vez de remitir al aprendiz a un conjunto de fórmulas sistemáticas lo pone en condiciones de probar *ab initio*, por un método elemental ejemplificado en diversos casos, otras proposiciones cualesquiera de ese mismo género.

El libro III parte de 11 definiciones y contiene 37 proposiciones, 5 de ellas problemas y las otras teoremas. Presenta la geometría del círculo e incluye el estudio de círculos, sus segmentos, intersecciones y tangencias. Tiene especial relieve la construcción de III 1 para determinar el centro de un círculo, aunque su prueba supone que una recta y un círculo no pueden tener más de dos puntos en común, condición que cabe establecer a partir de III 2. La suposición más general es la característica de la geometría plana euclídea, la de continuidad. El libro no está muy cuidado desde un punto de vista

sistemático deductivo. Apenas guarda relación con los dos anteriores y tampoco tiene mucha cohesión interna: dejando al margen III 1, hay 14 proposiciones (2, 3, 5-8, 12-16, 18, 20, 23) que no dependen de resultados presentes en III, y hay 13 proposiciones (4, 7, 8, 12, 13, 15, 25, 19, 30, 33-35) que nada contribuyen a la obtención de otros resultados en el mismo libro. De ahí que, en este libro, menudeen las revisiones de varias de sus pruebas y las alternativas propuestas por los comentadores y editores [19].

El libro IV parte de 7 definiciones y consta de 16 proposiciones, todas ellas problemas. Estudia inscripciones y circunscripciones de figuras regulares rectilíneas y círculos, y ofrece la construcción de polígonos regulares, como el pentágono o el hexágono, por la duplicación de lados. El libro está compuesto en cierto modo por núcleos y quizás el más notable sea el dispuesto en torno a la inscripción del pentágono regular, IV 11. En ella concurren IV 1, 2, 5, 10 —así como material procedente del libro anterior, e.g. III 26, 27, 29—, y de ella parten las pruebas de IV 12, la circunscripción del pentágono, y IV 16, el problema final de inscribir un polígono regular de quince lados. Según el escolio IV nº 2, «este libro es descubrimiento de los pitagóricos»; puede que estos orígenes y su afinidad con la tradición de los problemas lo hicieran un tanto refractario al tratamiento sistemático. En todo caso, su calidad desde el punto de vista disciplinario es muy superior a su cohesión deductiva interna o a su congruencia teórica.

B.

Con el libro V pasamos al campo temático de la teoría generalizada de la proporción y a un legado matemático relativamente reciente. La teoría se refiere a magnitudes como términos de la relación de proporcionalidad; son magnitudes homogéneas y «arquimedianas» —por eso, entre otros motivos, la califico de teoría «generalizada» en vez de teoría sencillamente «general».

El libro parte de 18 definiciones, algunas de ellas sustanciales, y consta de 25 proposiciones, todas ellas teoremas. Veamos las siete

---

[19] Vid. las abundantes notas de Heath (1926 [2]) a las proposiciones de este libro, edic. c., 2, pp. 7 ss. También son ilustrativas las observaciones de I. Mueller (1981), o.c., pp. 177-179 en particular.

primeras definiciones. Según la def. 1, «una magnitud [*mégethos*] es una parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide [*katametrê*] a la mayor». Cabe entender que las magnitudes son abstracciones de objetos geométricos que únicamente consideran la cantidad, i.e.: longitud en el caso de las líneas, área en el caso de las figuras planas, volumen en el caso de los sólidos. Según la def. 2, «la mayor es un múltiplo de la menor cuando es medida por la menor». Así pues, las magnitudes son susceptibles de multiplicación. Si x es un m-múltiplo de y, x mide m veces y; entonces: $x = m \cdot y = (((y+y)_1 + y)_2 + \ldots + y)_m$, de modo que la multiplicación $m \cdot y$ de una magnitud y equivale a una adición reiterada m veces. Con ello se está suponiendo la existencia, para una magnitud dada, de un número indefinido de magnitudes iguales a ella —un supuesto tácito en V, pero tal vez declarado en otra obra de Euclides, *Data*, cuya definición 12 dice que áreas, rectas, ángulos y razones «están dados en magnitud cuando podemos hacer otros iguales a ellos»—. Pero hay, además, otras nociones y supuestos nunca declarados: por un lado, el concepto de medición y las relaciones «medir a/ ser medido por»; por otro lado, el supuesto de que siempre es posible la m-parte de una magnitud, de manera que para toda magnitud x hay una magnitud y tal que $x = m \cdot y$. Esta suposición obra tácitamente en la prueba del teorema V 18 sobre la proporcionalidad de las composiciones de magnitudes proporcionales; conviene notar de paso que tal suposición no vale para los números considerados en los libros VII-IX. Según la def. 3, «una razón [*lógos*] es un tipo de relación en lo que se refiere al tamaño entre dos magnitudes homogéneas». Parece un invitación a convenir en que una razón, como si se tratara de un espíritu elemental, se deja sentir con más facilidad que definir. Pero, a tenor de algunos escolios, la definición siguiente viene a introducir mayores precisiones; tal vez la principal sea sugerir que la noción de razón no tiene mucho sentido fuera del contexto de la teoría de las proporciones. En todo caso, la definición 4 es una de las consideradas básicas en la teoría. Reza esta def. 4: «Se dice que tienen una razón entre sí [*pròs állela*] las magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra». Hay escoliastas que ven aquí una caracterización de la homogeneidad de las magnitudes que guardan razón entre ellas; los hay que interpretan esta definición en el sentido de excluir las magnitudes infinitas, tanto las infinitamente grandes como las infinitamente pequeñas —posiblemente es más justo entender que excluye la rela-

ción de razón entre una magnitud finita y otra infinita del mismo género—; hay quienes, en fin, leen esta definición como si implicara magnitudes inconmensurables —aunque la distinción entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables carece de lugar en el contexto de la teoría generalizada del libro V—. También se ha relacionado la def. 4 con un supuesto que Arquímedes recordará o explicitará en *La cuadratura de la parábola*: «de áreas desiguales, el exceso por el que la mayor parte excede a la menor, si se añade a sí mismo, puede exceder a cualquier área finita dada», reformulado como una asunción más general en *Sobre la esfera y el cilindro*: «de líneas desiguales, superficies desiguales y sólidos desiguales, el mayor excede al menor por una magnitud que añadida a sí misma puede exceder a cualquier otra dada del mismo género». De este supuesto se sigue la existencia de múltiplos de una magnitud dada: si $x < y$, hay una magnitud m tal que $m \cdot x > y$. Suele recibir los nombres de «postulado de continuidad» y «condición arquimediana». Dentro de los *Elementos* esta suposición contribuye a la prueba de V 8 y, mucho más adelante y a través precisamente de la def. 4, a la prueba de X 1 —aunque asimismo X 1 podría considerarse lógicamente equivalente a esa suposición (vid. Mueller (1981), o.c., pp. 142-3)—. Vistas así las cosas, la asunción de Arquímedes en *Sobre la esfera...* extiende el criterio euclídeo de razón postulando que, si dos magnitudes guardan entre sí una razón conforme a la def. 4, su diferencia guardará una razón en el mismo sentido con cualquier otra magnitud homogénea, i.e. si $x > y$, hay una magnitud n tal que: $n \cdot (x-y) > z$. Pero también cabe entender que la def. 4 de Euclides y la condición de continuidad de Arquímedes son dos versiones independientes de un supuesto que obraba en las pruebas por «exhausción» que había avanzado Eudoxo: la versión de Euclides define la relación 'A guarda razón con B' entre magnitudes, dentro de su teoría de la proporción, y hace referencia a la multiplicación; la versión de Arquímedes postula en cambio la condición precisa para que ciertas clases de magnitudes (líneas, áreas, sólidos) se atengan efectivamente a la definición euclídea, y remite a la adición de diferencias. A esta luz, la versión de Euclides parece una reconstrucción, tan elaborada como lejana, de la base deductiva en la que se apoyan el lema de bisección (el teorema X 1) y sus aplicaciones (e.g. XII 2, 7, 10); mientras que la versión de Arquímedes responde a una elucidación analítica más certera y aproximada del supuesto que late en las pruebas correspondientes (vid. infra el teorema X 1 en D, y

la prueba de XII 2 en § 4.1). En otras palabras, el interés de Euclides no es otro de momento que sentar las bases generales de su teoría abstracta de la proporcionalidad.

La def. 5 es la piedra angular de la teoría: «Se dice que están en la misma razón unas magnitudes, la primera con respecto a la segunda y la segunda con respecto a la cuarta, cuando si se toman unos equimúltiplos cualesquiera de la primera y la tercera, y unos equimúltiplos cualesquiera de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden a la par, o son parejamente iguales, o resultan parejamente deficientes que los últimos equimúltiplos tomados respectivamente en el orden correspondiente». La definición suministra un criterio necesario y suficiente de proporcionalidad: según la def. 6, «las magnitudes que tienen la misma razón sean llamadas proporcionales (en proporción, *análogon*)». Diremos entonces que, x, y, z, w son términos proporcionales («x es a y como z es a w»), si y sólo si: si $m \cdot x > n \cdot y$ entonces $m \cdot z > n \cdot w$, o si $m \cdot x = m \cdot y$ entonces $m \cdot z = n \cdot w$ o si $m \cdot x < n \cdot y$ entonces $m \cdot z < n \cdot w$, para todo m, n. Conviene advertir que una proporción no es una igualdad entre dos objetos, una relación binaria o una identidad entre razones, sino más bien una relación cuaternaria, como revela el hecho de que Euclides se crea obligado a demostrar la proposición V 11 («razones que son las mismas que una misma razón también son las mismas la una que la otra» —si A:B :: C:D y E:F :: C:D, entonces A:B :: E:F), en vez de considerar que se trata de una aplicación trivial de la noción común (i *). Como consecuencia de esto, la notación habitual de una proporción euclídea en los términos '(x,y) = (z,w)' resulta inadecuada.

La def. 7 representa, a su vez, un criterio de no proporcionalidad. Reza: «Cuando, de los equimúltiplos, el múltiplo de la primera magnitud excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera está en una razón mayor con la segunda que la tercera con la cuarta». Es decir, x es a y más que z a w si y sólo si: $m \cdot x > n \cdot y$ pero no ($m \cdot z > n \cdot w$), para algún m, n. Una suposición suplementaria es la existencia de un cuarto término proporcional: se halla implícita en la prueba de V 18, aunque más tarde Euclides demuestra un caso particular, VI 12: «dadas tres líneas, hallar una cuarta proporcional». Una consecuencia del supuesto es la condición de tricotomía, coherente con el sistema ordenado de magnitudes que hoy prodríamos tomar como el dominio de objetos de la teoría. Todo

ello le permite a Euclides el recurso adicional de una prueba indirecta de proporción (i.e.: que x es a y como z es a w) por la reducción al absurdo de las alternativas de desproporción (que la razón de x a y sea mayor o sea menor que la razón de z a w). Si —como habitualmente se reconoce— la def. 5 se inspira en Eudoxo, esta def. 7 bien podría ser una contribución original euclídea.

La reconstrucción actual de la teoría de la proporcionalidad expuesta en el libro V puede tomar el camino siguiente [20]. Las magnitudes de referencia constituyen un sistema ordenado de objetos que cumplen las leyes ordinarias de concatenación y comparación extendidas a sus múltiplos. Por «concatenación» se entiende en este contexto la adición de objetos distintos cuya operación inversa es la sustracción que consiste en tomar una parte propia; sus leyes principales son las de conmutatividad y asociatividad. La «comparación» envuelve una relación de orden gobernada por la condición de tricotomía y la ley de transitividad. La extensión a los múltiplos implica que si $x < y$, hay una magnitud z tal que $z+x = y$, amén de las condiciones: $x > y$ ssi $m \cdot x > m \cdot y$, $x = y$ ssi $m \cdot x = m \cdot y$, $x < y$ ssi $m \cdot x < m \cdot y$ (uso 'ssi' como abreviatura de «si y sólo si»). Por lo demás, el sistema contiene al menos una magnitud e infinitas magnitudes iguales a ella. Los supuestos característicos de la teoría vienen a ser los siguientes: (1) no existencia de una magnitud máxima; (2) no existencia de una magnitud mínima; (3) densidad, es decir si $x > y$, hay una z tal que $x > z > y$; (4) la existencia de m-partes; (5) la existencia de una cuarta proporcional; (6) la condición arquimediana; (7) continuidad, i.e. todo corte en el sistema de magnitudes es hecho por una magnitud. Pues bien, cabe mostrar que (1) es consecuencia de la existencia de múltiplos cualesquiera de una magnitud y (2) es consecuencia de la existencia de m-partes, i.e. de (4), mientras que (3) se sigue a su vez de (1) y (2). Por otra parte (7), implica (4), (5) y (6), pero no es implicada por (4)-(6) pues los números racionales positivos son un modelo posible de (4)-(6) sin que lo sean de (7). No obstante, para los propósitos euclidianos podrían bastar (5) y (6): ambos implican (4), puesto que si $(m \cdot x, x) = (x,y)$ entonces y es una m-parte de x. En cambio, (4) y (5)

[20] Es el trazado por I. Mueller (1981), o.c,. c. 3, pp. 145-8 en especial. La teoría generalizada de la proporción expuesta en el libro V ha conocido varias reconstrucciones en un sentido análogo; cabe mencionar en particular F. Beckman (1967): «Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids», art. c.

no implican (6), habida cuenta de que cabe mostrar la independencia de la condición de Arquímedes (cfr. Hilbert (1899): *Grundlagen der Geometrie*, II § 12), ni por lo demás (4) y (6) implican (5).

Al margen de estas reconstrucciones estructurales, el libro V constituye una presentación sistemática de ideas y resultados que proceden de unas investigaciones relativamente recientes en la época de la confección de los *Elementos*. El escolio V 1° recoge la opinión de quienes dicen que el libro es un descubrimiento de Eudoxo, discípulo de Platón; el escolio V 3° precisa que el libro, aunque se considere como una contribución de Eudoxo, debe su organización a Euclides —y esta organización puede haber incluido variantes euclídeas equivalentes, pero no idénticas, a los lemas de Eudoxo—. Su notable cohesión interna y el poder de sistematización de la teoría generalizada de la proporcionalidad le han valido al libro cierto crédito «axiomático». H. Hasse y H. Scholz, en su «Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik» (*Kantstudien*, 33 (1928), pp. 4-34), lo describen como el primer intento de una axiomatización completa. Pero, desde luego, es más justo ver en él una reelaboración de las nociones recibidas en orden a conseguir conceptos y criterios precisos como los formulados en las definiciones 4, 5 y 7. Algo que hoy podemos echar de menos en el libro V es justamente esa base axiomática que le añaden sus actuales reconstrucciones, la base formada por unos postulados existenciales, unas leyes combinatorias y unas condiciones que determinan los objetos pertenecientes a su dominio de referencia. Por otra parte, aún nos aguarda un punto oscuro, el de las relaciones entre las magnitudes del libro V y los números del VII. Esta oscuridad en una cuestión capital para la fundamentación de unas investigaciones matemáticas cercanas a Euclides, según muestra el libro X, no es propia de una materia suficientemente elucidada y dispuesta a recibir la bendición deductiva de su coronación axiomática; y aún sería menos excusable si se tratara de la fundación axiomática misma de una teoría general. Dicha oscuridad más algunas otras ambigüedades y lagunas indican que la contribución de Euclides sigue en parte empeñada en el duro trabajo de análisis conceptual y depuración deductiva que habían iniciado algunos pioneros como Teeteto y Eudoxo.

El libro VI empieza con 4 definiciones y contiene 33 proposiciones, de las que 8 son problemas y las restantes teoremas. Aplica la teoría de la proporción a la geometría plana desarrollando una teoría de los polígonos semejantes y generalizando el procedimiento

de aplicación de áreas, de modo que algunos de sus problemas vienen a ser réplicas generalizadas de resultados obtenidos por medios más elementales en los dos primeros libros (e.g.: VI 31 es una generalización de I 47; VI 28, de II 5; VI 30, de II 11; VI 13, de II 14). El libro está compuesto por diversos núcleos: 4-7 sientan las condiciones de semejanza entre dos triángulos (a partir del criterio establecido en la def. 1: «figuras rectilíneas semejantes son las que tienen sus ángulos rigurosamente iguales y los lados en torno a los ángulos iguales, proporcionales», noción ya conocida por Aristóteles (*APo.* II 17, 99a13-14) y no bien precisada pues no expresa la necesidad de tomar los ángulos iguales en el mismo orden); 9-13 se ocupan de problemas de cortar rectas en proporciones dadas o determinar rectas que las satisfagan (VI 13 prueba la manera de hallar una medida proporcional entre dos rectas dadas); otro núcleo, 18-26, apunta a 28 y 29, donde hoy suelen verse contrapartidas geométricas de ecuaciones cuadráticas; hay, en fin, proposiciones como VI 32-33 que miran hacia las construcciones del libro XIII. En suma, el libro carece de cohesión interna e incluso contiene alguna que otra anomalía desde un punto de vista deductivo, como la prueba de un caso particular VI 14 sin reducción al caso general VI 23, o la separación entre una proposición (VI 24) y su conversa (VI 26) por otra, VI 25, de más interés histórico —recoge un resultado atribuido a Pitágoras— que teórico o metódico en este contexto.

C.

Los libros VII-IX presentan y desarrollan la teoría aritmética de los *Elementos*. En conjunto, comprenden 102 proposiciones presididas por las 23 definiciones que Euclides introduce en el libro VII. Puede ser un signo de unidad esta agrupación de las definiciones a la cabeza de VII, que contrasta con el hábito anterior de irlas distribuyendo por cada uno de los libros I-VI. También suelen llamar la atención la ausencia de postulados y el hecho de que no haya en VII-IX ningún problema reconocido como tal. Las pocas proposiciones que no constituyen teoremas expresos, e.g. VII 2 y 3 o IX 18 y 19, son investigaciones más teóricas que prácticas: se marcan el propósito de hallar algo (VII 2: la medida común máxima de dos números no primos entre sí, VII 3: la medida común máxima de tres; IX 18: un tercer término proporcional a unos números dados,

IX 19: un cuarto proporcional), en vez de hacerlo o construirlo (aunque los mss. theoninos rematan la prueba de VII 3 con la cláusula equívoca «que es lo que había que hacer»). La aritmética de los *Elementos* considera que los números son unos objetos susceptibles de hallazgo, no de generación o producción, y en VII-IX desaparece la habitual terminología diagramática que describe o prescribe acciones como las de construir, levantar, prolongar, cortar, etc.

Algunas definiciones dignas de mención son las siguientes:

Según la def. 1: «la unidad [*monás*] es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una». Iámblico (*In Nicomachum Comm.*, 11.5) dice que ésta es la definición de unidad de los autores modernos; los pitagóricos la habían definido a veces como una «divisoria entre número y partes» o como una «cantidad delimitante». La definición moderna ya es familiar para Platón (*República,* VII 526a: «hombres asombrosos, ¿acerca de qué números discurrís en los cuales la unidad se halla tal como vosotros la consideráis, siendo en todo igual a cualquier otra unidad sin diferir en lo más mínimo ni contener en sí misma parte alguna?»). Parece una definición dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad; su sentido resulta algo menos impreciso a contraluz de la noción subsiguiente de número. Según la def. 2: «un número es una pluralidad compuesta de unidades». Las relaciones entre unidad y número recuerdan la concepción que Aristóteles describe en diversos lugares de la *Metafísica* (e.g.: «"uno" significa "medida de una pluralidad", y "número" significa "pluralidad medida" y "pluralidad de medidas", y por eso es razonable que la unidad no sea un número pues tampoco la medida es medidas, sino que son principios tanto la medida como la unidad», o.c. N 1, 1088a4-8). En el contexto de los *Elementos*, la unidad no es un número ni hay una cosa tal como la pluralidad formada por una sola unidad: Euclides da pruebas separadas para unidades (VII 15) y para números (VII 9), aunque no siempre sea coherente con esta distinción. Por otro lado, a tenor de la prueba de VII 31 («todo número compuesto es medido por algún número primo»), la pluralidad numérica es una pluralidad finita. La primera suposición euclídea viene a ser entonces que hay una cantidad indefinida de unidades y las colecciones finitas de ellas constituyen los números. A esto podemos añadir la concepción característica del número en los *Elementos*: los números no se producen, se encuentran; los números no se generan dentro de una serie mediante la idea de sucesión, ni se determinan por esta forma-

ción genealógica. La verdad es que no faltan en ocasiones razonamientos inductiviformes sobre colecciones y secuencias de números naturales dados (e.g. en la línea VII 2, 3, 33), pero los *Elementos* no tienen una idea estructural de la serie infinita de los enteros ni cuentan con un principio general de inducción matemática; así, en VII 16, Euclides prueba la conmutatividad de la multiplicación no con arreglo a este principio sino a partir de una ilustración con números cualesquiera.

Según la def. 3, «un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor»; pero, como añade la def. 4, un número no es parte sino «partes, cuando no lo mide» (por "parte [*méros*]" se entiende una parte alícuota o submúltiplo; por "partes [*mére*]", un número de partes alícuotas o una fracción propiamente dicha). Recíprocamente, «el número mayor es un múltiplo del menor cuando es medido por el menor», dice la def. 5. El uso de estas definiciones aritméticas envuelve nuevas suposiciones tácitas sobre la noción de medida y la relación de medir una cantidad un número determinado de veces, amén de los axiomas pertinentes (e.g.: si A mide a B y B mide a C, A mide a C; si A mide a B y a C, mide a B+C). Podemos colegir que «X mide a Y» significa «X es un factor o divisor de Y» pues «Y es medido por X» monta tanto como «Y es un múltiplo de X». Entonces: X es *parte* de Y si y sólo si X < Y siendo X un factor o divisor de Y —de modo que Y es a su vez múltiplo de X (e.g.: el número 2 es parte del número 6)—. Pero X es *partes* de Y si y sólo si X < Y sin que X sea un factor o divisor de Y —i.e. cuando X es *partes* de Y nos hallamos ante una fracción propiamente dicha (e.g.: el número 4 no es parte sino partes del número 6)—.

Euclides recoge a continuación, en las definiciones 6-10, una serie de nociones de clara estirpe pitagórica: las de número par (6, «un número par es el divisible en dos partes iguales»), impar (7, «un número impar es el no divisible en partes iguales, o el que difiere de un número par por una unidad», y otras nociones derivadas. Según la def. 11, «un número primo es el que sólo es medido por una unidad»; Aristóteles ya precisaba que el número primo no era medido por ningún número. Según la def. 12, «números primos entre sí son aquellos que sólo son medidos por una unidad como medida común». La importancia que cobran en VII los números primos relativos es considerable; quizás se derive del algoritmo euclídeo para hallar la medida común máxima (el máximo común di-

visor) de dos números, que se presenta en VII 1 como un «test» de esa propiedad de ser primos entre sí. El interés de Euclides por los primos relativos puede que le haga descuidar los primos «absolutos» y constribuya a que su prueba del hoy llamado «teorema fundamental de la aritmética», a saber: la factorización unívoca de los números primos, no sea una demostración completa ni en el caso del teorema que más se le aproxima, IX 14, ni en otros teoremas análogos, VII 30-31.

Según la def. 15, «se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado es añadido a sí mismo tantas veces cuantas unidades hay en el otro, y así se produce [*génetai*] algún número». Es una versión clásica de la multiplicación como adición abreviada. La «generación» que se menciona no es otra cosa que la constitución o producción recursiva. Según la def. 20, «los números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo que el tercero del cuarto». Euclides no define la noción aritmética de razón. Su idea de la proporción numérica envuelve de hecho los supuestos de la teoría generalizada de la proporción que pueden aplicarse en el presente caso. De seguir por esta línea, todo número sería una magnitud aunque no toda magnitud fuera un número —pues los números de VII no cumplen ciertas condiciones de las magnitudes de V, como la posibilidad de tomar en todo caso la m-parte de una magnitud o la existencia de un cuarto proporcional—. Pero ésta no es precisamente la perspectiva de los *Elementos*, ni se dice en lugar alguno que los números son una clase de magnitudes conmensurables. Aunque Euclides emplea tácitamente algunos presupuestos de la teoría generalizada de la proporción en el desarrollo de la aritmética de VII-IX, demuestra las leyes de la proporcionalidad numérica por separado y no aplica a los números las propiedades de la proporción generalizada que podrían convenirles. A lo largo del VII-XI todo parece indicar que nos las habemos con unos objetos autónomos, independientes de las magnitudes de V-VI, y al menos por ahora no hay motivos para entretejer la caracterización de los números con la antes prevista para ellas.

Desde el punto de vista metodológico, el libro VII es una esmerada reconstrucción del antiguo legado aritmético de raíces pitagóricas [21]. Su cohesión deductiva interna, aunque no tenga una dispo-

---

[21] Las reconstrucciones modernas de este legado pitagórico parten de las conjeturas de O. Becker: «Die lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der

sición tan lineal como la del libro I, es parejamente notable; y esto mismo se podría decir de su calidad y eficacia expositivas como introducción a unos métodos característicos de la aritmética griega. Las tres primeras proposiciones presentan el algoritmo euclídeo para la determinación de números primos y el hallazgo de la medida común máxima entre dos o tres números no primos entre sí. VII 4-20 sientan las bases de la teoría de la proporción numérica que se aplica en este y en los otros dos libros de la aritmética. VII 21-32 desarrollan el importante tema euclídeo de los primos relativos y VII 33-39 estudian la expresión de razones en su menores términos y el hallazgo de mínimos comunes múltiplos. Por lo demás, la agrupación de las definiciones aritméticas en la cabecera del libro y el material fundacional recogido en su primera parte hacen de él una fuente sistemática de ulteriores resultados como los obtenidos en los dos libros siguientes, el VIII y el IX.

El libro VIII se ocupa de series de números en proporción continua, i.e. en progresión geométrica, noción que permanece indefinida. El libro IX es ya una especie de miscelánea aritmética. Incluye el resultado IX 4, la primicia de la moderna resolución unívoca de un número en sus factores primos, y el teorema IX 20, que establece la infinitud de los números primos; en IX 21-36, Euclides parece transcribir un manual aritmético anterior seguramente de origen pitagórico (en opinión de Heath (1926) [2], edic. c., 2, pág. 295, hay indicios de que existían *Elementos* de aritmética en la época de Arquitas de Tarento, durante el último tercio del s. V a.n.e. y la primera mitad del s. IV a.n.e.); el libro y esta parte aritmética de los *Elementos* se cierran con IX 36, que da la fórmula para obtener números perfectos, «números iguales a la suma de sus factores» según la def. 22 de VII (e.g. el número 6, el 28, el 496).

eucklidischen *Elemente»*, *Quellen und Studien zur Geschicte der Mathem., Astron. u. Phys.* Abt. B 3 (1936), pp. 533-553. Vid. el panorama ofrecido por W. R. Knorr (1975): *The Evolution of Euclidean Elements,* o.c., c. V, pp. 131-169; así como su «Problems in the interpretation of Greek number theory», *Studies in History and Philosophy of Science,* 7 (1976), pp. 353-368. Hoy tampoco falta la correspondiente reconstrucción axiomática de esta aritmética clásica, vid. N. Malmendier (1975) «Eine Axiomatik zum 7. Buch der *Elemente...»*, art. c. Puede que el primer ensayo en una línea parecida se remonte a la *Arithmetica* de Jordano (med. s. XIII); vid. E. Grant, ed.: *A Source Book in Medieval Science,* Cambridge (Mass.), 1974, pp. 102-106.

D.

El libro X ha venido a conocerse como «la croix des mathématiciens», desde que Simon Stevin recordara que muchos sólo veían en él dificultades sin provecho [22]. Este apelativo poco cariñoso podría extenderse: si fue «cruz de los matemáticos», hoy no es menos «cruz de los historiadores de las matemáticas». Por mi parte, creo que no merecería esa denominación únicamente por los problemas de interpretación que ha suscitado sino por su calidad de encrucijada dentro de los *Elementos*: en él convergen desarrollos de la teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos, y de él parten vías de construcción de figuras regulares tanto planas como sólidas —tema posterior de los libros XI-XIII sobre geometría del espacio—. Consta de 16 definiciones repartidas en tres grupos a lo largo del libro; incluye 115 proposiciones, todas ellas probadas como teoremas aunque varias (unas 24) revistan la forma ya conocida de investigaciones que se proponen hallar algo con independencia de sus condiciones de generación o de construcción. El libro acusa en parte un laborioso esfuerzo por reconstruir de forma sintética, a manera de ejercicio académico, varias series de problemas, susceptibles quizás de soluciones analíticas más simples aunque sean relativamente avanzados. En sustancia está dedicado a la inconmensurabilidad y a la clasificación de rectas irracionales. De ahí la importancia del primer grupo de definiciones que encabeza el libro.

Según la def. 1, «se dicen conmensurables [*sýmmetroi*] las magnitudes que son medidas por la misma medida, e inconmesurables [*asýmmetroi*] las que no tienen medida común». Según la def. 2, «las líneas rectas son conmensurables en cuadrado [*dynámei*] cuando los cuadrados sobre ellas son medidos por una misma área, e inconmensurables en cuadrado cuando los cuadrados sobre ellas no pueden tener ninguna área como medida común». De acuerdo con la def. 3, «con estos supuestos se prueba que hay una cantidad ilimitada de líneas rectas que son conmensurables e inconmensurables respectivamente, unas en longitud [*mékei*] sólo y otras en cuadrado también, con una línea recta designada. Llámense entonces racional [*rheté*] la línea recta designada, y racionales las líneas que son conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado o bien en cuadrado sólo,

[22] Vid. W. R. Knorr: «La croix des mathématiciens: the Euclidean theory of irrational lines», *Bulletin Amer. Mathem. Soc.*, 9 (1983), pp. 41-69.

pero irracionales [*álogoi*] las inconmensurables con ella». Y, en fin, las áreas se llamarán racionales o irracionales según sean conmensurables o inconmensurables con un cuadrado racional, a tenor de la def. 4. Sentada la distinción capital entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables, tiene especial relieve la subdivisión de las rectas conmensurables/inconmensurables en otras dos clases: las que lo son en cuadrado y las que lo son en longitud. Las primeras son el objeto de la def. 2. Las segundas aparecen determinadas en el contexto de X 9: las rectas son conmensurables o inconmensurables en longitud según que sus cuadrados tengan entre sí o no la razón que un cuadrado guarda con un número cuadrado (el escolio 62 de X asegura que éste fue un descubrimiento de Teeteto). Como añade un porisma de esta prueba: si A es conmensurable en longitud, es conmensurable en cuadrado, pero no vale la conversa; y si A es inconmensurable en cuadrado, es inconmensurable en longitud, pero tampoco vale la conversa. La def. 3 introduce un nuevo motivo de clasificación: la distinción entre rectas racionales e irracionales. El escolio 1 de X da a entender que si la primera distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables en natural [*phýsei*], ésta segunda entre líneas o áreas racionales e irracionales es convencional [*thései*] y dice relación a la recta designada como racional. Por otra parte, el uso del calificativo «racional» (o «expresable») en los *Elementos* parece peculiar de Euclides y más amplio que otros anteriores o posteriores, mientras que, en justa correspondencia, su noción de irracionalidad resulta más restringida pues sólo son líneas irracionales las inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con la recta designada como racional.

El libro X contiene muchos y diversos resultados notables. Mencionaré únicamente algunas de las proposiciones primeras. X 1 es la base del método de exhausción: «dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad, y del resto una magnitud mayor que su mitad, y este proceso es reiterado constantemente, quedará una magnitud que será menor que la menor de las magnitudes dadas»; apenas rinde servicio alguno hasta el libro XII. Como ya he sugerido, este teorema y la def. 4 del libro V han sido objeto de discusiones historiográficas y matemáticas. Por un lado, se les ha atribuido el sentido de una exclusión de infinitésimos con vistas a prevenir las paradojas eleáticas sobre el infinito, aunque a mi juicio son más significativos aún desde el punto de vista de la consecución de un rigor deductivo mayor en la prueba matemática

(vid. supra § 1.3). Por otro lado, se ha planteado su relación con un lema anterior de Eudoxo asumido y declarado por Arquímedes en el prefacio de *La cuadratura de la parábola* y como asunción 5 de *Sobre la esfera y el cilindro* (vid. supra, B). Y en fin, desde un punto de vista más conceptual y menos histórico, también cabe considerar su significación en el contexto del método de exhausción y en la perspectiva del cálculo infinitesimal. Una diferencia sustancial entre el proceder «exhaustivo» griego y el moderno cálculo infinitesimal es que el primero carece de la noción de límite: por consiguiente, no precisa de un postulado de continuidad para establecer la existencia del límite de convergencia de una secuencia cualquiera. En la práctica griega, el «límite» —por así decir— ya está dado por el objeto geométrico considerado y el método se aplica a la «construcción de la secuencia convergente» —también es un decir, al menos habida cuenta del papel que desempeña la reducción al absurdo en las aplicaciones del método. En cualquier caso, los matemáticos griegos clásicos, como Euclides o Arquímedes, trabajan con objetos geométricos en vez de operar con conceptos o estructuras generales de cálculo. Euclides no presenta X 1 como lema envuelto en el uso de la «exhausción» sino en el contexto anthyphairético de las proposiciones X 3-4, y en términos más débiles que los del lema de bisección exacta empleado por Arquímedes —sin embargo, un corolario de X 1 señala que «el teorema puede probarse de modo similar aun cuando las partes sustraídas sean mitades», recogiendo así la bisección habitual en las pruebas arquimedianas—.

La proposición X 2 se hace eco del criterio anthyphairético de inconmensurabilidad. Las proposiciones X 3-4 ofrecen el algoritmo euclídeo para la determinación de la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables. La proposición X 5 sienta que «las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón que un número guarda con otro número»; parte de la prueba descansa en la definición 20 del libro VII, i.e. en una noción de proporción prevista para términos que sean todos ellos números, y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la def. 20 de VII también lo son en el sentido generalizado de la def. 5 de V. En otras palabras, después de dar dos caracterizaciones autónomas y separadas de la proporcionalidad, Euclides viene a suponer que la segunda puede considerarse un caso particular de la primera, o que los números son en ciertos aspectos objetos parejos a las magnitudes. Esta congruencia ya era familiar en tiempos de Aristó-

teles: como ya he señalado en alguna otra ocasión, Aristóteles tenía clara conciencia de la generalidad de las pruebas derivadas del concepto eudoxiano de proporción, aplicables a números, tiempos, longitudes y sólidos (*APo.* I 5, 74a17), y había observado que el método aritmético utilizado para establecer ciertas propiedades de las magnitudes no sería adecuado si las magnitudes no fueran de algún modo como los números (*APo.* I 7, 75b4-5). Sin embargo, no es una congruencia expresamente prevista en los *Elementos*. Las proposiciones X 6-8 mantienen y desarrollan la confluencia introducida en X 5 para desembocar en el resultado antes citado, X 9, atribuido a Teeteto.

El libro X recoge investigaciones relativamente recientes y se mueve en una línea de elucidación y de catalogación progresiva de los resultados acerca de tipos de conmensurabilidad/inconmensurabilidad y clases de rectas racionales/irracionales. Pappo, en un comentario sobre el libro que sólo se ha conservado a través de una versión árabe, señala este papel clarificador que corresponde a Euclides (cit. en Heath (1921): *A History of Greek Mathematics*, edic. c., I, pág. 403). Sin embargo, este libro mantiene algunas oscuridades y ambigüedades de principio. Su estructura deductiva también adolece de una deficiente cohesión interna; por ejemplo, las proposiciones 27-35, 42-47, 66-70, 79-84, 85-90, 103-107 representan una especie de núcleos aislados en el conjunto del libro, y algunas otras como 2-4, 24-25, 112-115 no cumplen ningún cometido en el conjunto de los *Elementos*. Incluso se ha dicho de él que es un desastre pedagógico. Con todo, cabe reconocer al libro ciertos valores disciplinarios y metódicos: no sólo contiene el lema del procedimiento de exhausción y el algoritmo euclídeo, sino que logra una acabada clasificación de líneas irracionales que llega hasta catalogar 13 géneros distintos —enumerados al final de X 111—; también enseña a construir muestras de cada uno de los géneros así como a demostrar que otras subdivisiones de alguno de estos géneros no son especies vacías.

E.

Los últimos libros, XI-XIII, contienen la geometría del espacio de los *Elementos*. Al igual que sucedía con la aritmética, esta parte descansa en 28 definiciones avanzadas al principio de su primer libro y carece de postulados propios. Consta de 75 proposiciones, 63 de

ellas teoremas y las otras 12 problemas —aunque entre éstos aparezcan unas proposiciones mixtas, como XIII 13-17, cuyo enunciado marca expresamente la construcción de un objeto y la demostración de alguna característica métrica esencial. Un rasgo interesante de algunas definiciones (la def. 14 de la esfera, la def. 18 del cono) es la introducción del movimiento que les da un aire de descripciones genéticas. Por ejemplo, la def. 14 dice: «cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se lo vuelve de nuevo a la misma posición de la que había partido su puesta en movimiento, la figura así comprendida es una esfera». Desde luego, esta noción de esfera no era la única que podía conocer Euclides pues Aristóteles ya estaba al tanto de la extensión del criterio de equidistancia a esta figura sólida (vid. *De Coelo* II 14, 297a24) y, posteriormente, Herón la define en esta línea de modo parejo a como Euclides había definido el círculo (Def. 76: «una esfera es una figura sólida rodeada por una superficie tal que todas las líneas que caen sobre ella a partir de un punto interior de la figura son iguales entre sí»); la opción de Euclides puede justificarse por su rendimiento en la prueba de las últimas proposiciones del libro XIII. Otra posibilidad que Euclides parece ignorar por completo es servirse en este caso de un postulado análogo al postulado (iii) de la geometría plana. La ausencia de postulados específicos también es digna de tenerse en cuenta. Un procedimiento que Euclides emplea habitualmente en su geometría sólida es la reducción de una cuestión tridimensional a otra bidimensional a la que aplica luego resultados o lemas previamente obtenidos. Pero esta estrategia reductiva supone relaciones no tratadas antes en los *Elementos* entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos, que quedan sin especificar; análogamente, el empleo de la geometría plana en el contexto de XI-XIII también discurre al margen de un planteamiento expreso de la posibilidad de transferir los resultados relativos a un plano a la solución de problemas que involucran varios planos.

La celebridad de esta última parte de los *Elementos*, al margen de sus eventuales servicios a la astronomía helenística, ha residido en el estudio de los cinco poliedros regulares, los renombrados «cuerpos platónicos», en el libro XIII. (Ni los matemáticos se libraron del fervor neoplatónico de los albaceas grecolatinos del antiguo legado filosófico y científico griego.) Euclides prueba la construcción dentro de una esfera de la pirámide o tetraedro (XIII 13), el octaedro (XIII 14), el cubo (XIII 15), el icosaedro (XIII 16), el dodecaedro

(XIII 17), y remata libro y tratado con un famoso corolario a la proposición XIII 18 en el que asegura la inexistencia de algún otro poliedro regular. Como es sabido, Proclo, deseando vincular estos resultados con los cinco cuerpos platónicos del *Timeo*, considera que la construcción de los cinco sólidos regulares es uno de los objetivos de los *Elementos* de Euclides (*In I Eucl. Comm.*, 68.21-23). Aunque en el libro XIII concurren materiales y resultados de casi todos los demás libros de modo que presenta un alto grado de cohesión externa con el resto de los *Elementos*, la intención neoplatónica que Proclo le atribuye no está respaldada por ninguna indicación directa o expresa de Euclides, silencio que, por lo demás, se extiende a cualquier otro motivo filosófico o extramatemático sin excepción a lo largo del tratado. Por otro lado, cabe pensar en una filiación euclídea con la tradición matemática de la geometría sólida: tres de los poliedros regulares ya habían atraído la atención de los pitagóricos (el cubo, la pirámide, el dodecaedro) y los otros dos había sido estudiados por Teeteto (el icosaedro y el octaedro), según recuerda el escolio XIII 1. El hecho de que Teeteto pasara por ser «el primero en escribir sobre los cinco sólidos» es congruente además con su contribución el análisis de los irracionales (vid. Heath (1926) [2], edic. c., 3, pág. 438), y una congruencia similar es la que Euclides pone de manifiesto y desarrolla en el libro XIII; esto concuerda con su alineación en la estela matemática de tradiciones e investigaciones anteriores al *Timeo*. Esta línea de trabajo alcanzó luego la suficiente madurez para dar lugar —pocos años antes de los *Elementos*— a un tratado de Aristeo dedicado expresamente a una comparación relativamente sistemática de los cinco sólidos regulares: de este tratado pudo haberse beneficiado Euclides al componer el libro XIII al igual que efectivamente lo hizo el autor (Hypsicles) del apócrifo libro XIV un siglo más tarde.

El libro XIII recoge resultados de las otras partes de los Elementos, salvo de la aritmética y —curiosamente— del libro XII. Además, presenta una estructura deductiva interna sumamente cuidada. XIII 1-5 constituyen lemas básicos para el desarrollo del libro, que viene a desembocar en el estudio comparativo final de los sólidos regulares (XIII 18) y en su corolario. Pero la cohesión y la capacidad sistemática de los dos libros precedentes, el XI y el XII, es mucho menor. El papel de XI es preparar el camino hacia XIII y lo más significativo de XII es seguramente el empleo del «método de exhausción» en las pruebas de XII 2, 5, 10-12 y 18, sobre la base del

lema X 1 —una base parecida pero no igual a la que Eudoxo habría empleado en la obtención de XII 2, XII 7, XII 10 y XII 18, según da a entender Arquímedes en el prefacio de *Sobre la cuadratura de la parábola.*

Creo que las observaciones anteriores permiten sacar algunas conclusiones sobre la constitución metodológica de los distintos libros que componen los *Elementos.* La primera y más general es el contraste entre la fachada «axiomática» del libro I y la composición no poco heterogénea e irregular del conjunto de los *Elementos.* Aunque la composición euclídea está lejos de justificar el énfasis de Wittgenstein («Me gustaría decir: la matemática es una abigarrada mezcla [ein BUNTES *Gemisch*] de técnicas demostrativas», *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* (1939-1940) III, §46), también dista de ser el sistema constituido por nuestra geometría euclidiana moderna o contemporánea. Da la impresión de hallarse a medio camino entre un extremo y otro. Esta impresión no sólo se debe a la variedad de ámbitos teóricos involucrados —cuyos nexos sistemáticos no están a veces declarados— o a la diversidad de métodos de solución y prueba, sino también a la dispar conformación deductiva de los distintos libros. Por lo que se refiere a este último aspecto, procuraré sintetizar las diferencias y las irregularidades al hilo de unas nociones algo genéricas que ya he venido empleando y no aspiran a ser otra cosa que vías de aproximación.

Para empezar, podemos distinguir entre una cohesión deductiva interna y una cohesión externa. La cohesión interna será mayor o menor según sea el grado de sistematización deductiva que medie entre las proposiciones de un determinado libro; la cohesión externa será mayor o menor según sea el grado de articulación deductiva que se dé entre el libro en cuestión y otros libros pertenecientes al mismo campo teórico. También cabe distinguir, dada la índole peculiar de un tratado como los *Elementos*, entre la coherencia teórica de un libro y su disposición disciplinaria. La coherencia teórica de un libro será mayor o menor en razón de si el orden de desarrollo deductivo casa mejor o peor con las líneas o focos de interés temático o sustantivo de los resultados presentados. La disposición disciplinaria será mejor o peor en razón de la claridad de la exposición y de su eficacia didáctica; aquí pueden entrar consideraciones sobre la transición expositiva desde las cuestiones relativamente simples a las cuestiones más complejas o sobre las facilidades dadas para el aprendizaje y el

dominio de unas técnicas de solución o de prueba. Estos criterios, aunque no son precisos, pueden ser significativos en la medida en que no siempre resultan coincidentes ni se dan en un grado correlativo. Por ejemplo, si bien X tiene cierto grado de cohesión externa, ciertos visos de «encrucijada», ni su cohesión interna ni su coherencia teórica ni su plan de exposición disciplinaria son notables. Por otro lado, la aplicación de áreas desarrollada en II y en VI presenta una estimable disposición disciplinaria según los considerandos apuntados, en especial el aprendizaje de esta técnica por su aplicación a casos varios; pero, desde luego, ni II ni VI son brillantes muestras de coherencia teórica o de cohesión deductiva interna. Aún es más notoria la distancia que media entre la eficaz exposición de la técnica de inscripciones y circunscripciones emparejadas en el libro IV, y el bajo grado de cohesión interna y de coherencia teórica que presenta el libro en su conjunto. Algo parecido cabe pensar de fragmentos como IX 21-36, cuyas virtudes expositivas y didácticas contrastan con el aire de miscelánea (temática y deductiva) que envuelve todo este libro. En general, uno tiene la impresión de que los *Elementos* satisfacen mejor el propósito de una introducción eficaz y progresiva a las teorías y métodos de la matemática elemental, que las exigencias de una reconstrucción deductiva cabal, «axiomática», de ese cuerpo de conocimientos; cuando menos, su rendimiento es más efectivo y regular en el sentido de lo primero que en el sentido de ésto último. Finalmente, creo que convendrá añadir una indicación que dé cuenta de la mayor o menor antigüedad de los materiales o resultados recogidos en un libro determinado.

Así podemos llegar a un esquema general que toma en consideración tanto el grado mayor (+) o menor (−) de cohesión (interna y externa) como el grado de coherencia, al tiempo que recoge alguna muestra ilustrativa de cada uno de los casos señalados; con otra entrada que indique la antigüedad o modernidad relativas de los resultados en cuestión, el esquema adoptará la forma de la tabla siguiente:

		material recogido	
		más antiguo	más reciente
cohesión interna	+:	I, VII	V, XIII
	−:	III, IV, IX	VI, X

		material recogido	
		más antiguo	más reciente
cohesión externa	+:	I, VII	V, X, XIII
	−:	III, IX	XII
coherencia teórica	+:	I	XIII
	−:	IV, IX	VI, XII

De la tabla se desprende que no hay una correlación significativa entre el grado de sistematización interna de estos libros y la antigüedad relativa del material que trabajan. Tanto los resultados más antiguos y manidos como los más frescos y recientes parecen prestarse a reconstrucciones más afortunadas (e.g. I, VII; V, XIII) y menos afortunadas (e.g.: III, IV; VI, X).

3. *La demostración euclídea.*

Los *Elementos* de Euclides no contienen declaración de principios alguna sobre las ideas de demostración y de organización deductiva general a las que pudieran atenerse. Tampoco se conserva un tratado suyo, *Pseudaria* (o *«Pseudographémata»*, según Alejandro), destinado a entrenar al estudiante en el uso de los métodos de la geometría elemental —mediante la prevención de falacias y el ejercicio de la capacidad de discernimiento—, del que tal vez hubiéramos obtenido mayores luces sobre la concepción euclídea de la argumentación. Sin embargo, la práctica seguida por Euclides en las pruebas y en la disposición deductiva de los cuerpos teóricos que componen los *Elementos* parece, de suyo, suficientemente clara y elocuente para permitir que nos formemos una idea un tanto precisa en uno y otro respecto. Así, en el primer caso, podremos cotejar las demostraciones de Euclides con las pruebas o con las concepciones de la demostración que ya hemos conocido; y en el segundo caso, podremos pronunciarnos sobre la significación metodológica, axiomática o no, de la organización deductiva del tratado —o de sus partes más sistemáticas, en particular—.

3.1 La práctica de la prueba en los *Elementos.*

Los comentarios de Proclo (*In I Euc. Comm.*, 203.1 ss.) nos dan a conocer una especie de patrón general de las pruebas que Euclides

ofrece normalmente en los *Elementos*. Hay indicios de que antes de Euclides ya existía una pauta tradicional de prueba un tanto parecida. Aparte de ciertas huellas incidentales que se traslucen en el mismo lenguaje metasilogístico de Aristóteles en los *Primeros Analíticos*, esa pauta puede vislumbrarse en la práctica seguida por Autólico de Pitania en los primeros tratados matemáticos completos que hoy se conservan (*Sobre la esfera en movimiento, Sobre ortos y ocasos*). Según Proclo, el desarrollo de toda proposición (sea un problema o sea un teorema, distinción no observada como una dicotomía categórica en los *Elementos*), si es cabal y completo, comprende los siguientes pasos:

a. Enunciado *[prótasis]:* proposición del objeto a construir cuando se trata de un problema, o del aserto a establecer cuando se trata de un teorema; su formulación perfecta declara por una parte lo que está o se considera dado y, por otra parte, lo que se busca probar.

b. Exposición *[ékthesis]:* presentación de lo dado o introducción de un caso determinado mediante la clásula «sea ...» y el uso de letras como abreviaturas que designan los elementos del caso (líneas, figuras, magnitudes, números).

c. Determinación o delimitación *[diorismós]:* especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto; en los problemas se concreta la tarea con la fórmula «lo que se requiere es ...», en los teoremas se concreta la aserción con la fórmula «digo que ...». Por «diorismós» también se entiende a veces una delimitación en el sentido más preciso de fijar las condiciones de posibilidad de la prueba: si lo buscado es imposible o es posible y, entonces, cómo se puede conseguir efectivamente; cuando tiene este significado de condición o límite de la prueba, suele seguir inmediatamente a la *prótasis* como un apéndice del enunciado del problema (e.g. I 22, VI 28).

d. Preparación *[kataskeué]:* urdimbre o disposición de construcciones y relaciones, a partir de lo dado, en orden a la obtención del resultado propuesto.

e. Demostración *[apódeixis]:* proceso demostrativo propiamente dicho que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de los conocimientos previos, primordiales (definiciones, postulados, nociones comunes) o sentados en pruebas anteriores.

f. Conclusión *[sympérasma]:* aserción de que se ha satisfecho el *diorismós* en el caso de problemas, o reiteración de la *prótasis* en el caso de teoremas, para confirmar que el objeto de la prueba ha sido establecido. La conclusión de problemas se remata con la cláusula final: «que era lo que había que hacer [*hóper édei poiêsai*]»; la de teoremas, con la cláusula final «que era lo que había que demostrar [*hóper édei deîxai*]».

Proclo advierte que no siempre se dan todos estos pasos en las pruebas de los *Elementos*. Pero sí hay tres que son esenciales y nunca han de faltar: a, el enunciado; e, la demostración; f, la conclusión. «Pues es parejamente necesario conocer de antemano el objeto de la prueba, demostrar éste mediante los pasos conducentes y establecer lo probado a modo de conclusión.» (Las versiones medievales, a juzgar por las atribuidas a Adelardo de Bath o a Gerardo de Cremona, marcarán en cambio el enunciado o proposición a probar, la exposición o especificación de un caso, «exempli —verbi—gratia», y la prueba, «rationis causa», que incluye los pasos de preparación, demostración y conclusión.) Convengamos en que el proceso a-f representa una especie de patrón estándar de la exposición euclídea de una prueba. Con todo y con esto, no esclarece apenas el sustrato metodológico de la práctica euclídea de la demostración. De modo que también conviene examinar algún ejemplo concreto.

El primero puede ser justamente el problema I 1. Se trata además de una muestra cabal del proceso completo antes presentado —y así lo iré señalando en la exposición que sigue (vid. Stamatis, edic. c., (1969) I, pp. 7-8).

a. Construir un triángulo equilátero sobre una línea recta finita dada.

b. Sea AB la línea recta dada.

c. Así pues, lo requerido es construir un triángulo equilátero sobre AB.

d. Sea BCD el círculo descrito con centro A y con distancia AB <postulado (iii)>; sea así mismo ACE el círculo descrito con centro A y distancia BA <(iii)>, y trácense las rectas CA, CB desde el punto C, en el que ambos círculos se cortan entre sí, hasta los puntos A, B <(i)>.

e. Ahora bien, como el punto A es el centro del círculo CDB,

AC es igual a AB <definición 15>; asimismo, como el punto B es el centro del círculo CAE, BC, es igual a BA <def. 15>; pero ya se había probado que CA es igual a AB, por lo tanto cada una de las rectas CA, CB es igual a AB; y las cosas que son iguales a la misma cosa son también iguales entre sí <noción común (i*)>; por lo tanto CA, CB son iguales entre sí. Luego, las tres líneas rectas CA, AB, BC son iguales entre sí.

f. Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero, y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

Al tratarse de la primera proposición de los *Elementos*, sus *arkhaí* han de intervenir directamente: las construcciones de la *kataskeué* (d) son realizadas inmediatamente de acuerdo con los postulados que permiten trazar una recta y un círculo; las relaciones de igualdad o congruencia aseveradas en la *apódeixis* (e) se fundan a su vez en una definición y una noción común. Precisamente la argumentación en nombre de esta noción, «las cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí», representó después de Euclides una especie de paradigma de la demostración en general (e.g. en la *Introducción a la dialéctica* de Galeno, I.2-3), y de la demostración geométrica en particular. Incluso ejerce de piedra de toque para la reducción de este tipo de argumentación al silogismo categórico, según muestran algunos comentadores aristotélicos. Y, por cierto, casi hasta ayer ha mantenido ese peculiar estatuto, pues no es otra la muestra que elige la tortuga de L. Carroll (1895: «Lo que la tortuga le dijo a Aquiles») para confundir al viejo héroe en punto a las relaciones entre las secuencias deductivas de enunciados, las reglas o pautas de deducción y los procesos intencionales de inferencia [23]. Aunque la lógica euclídea poco tenga que ver con la que uno concedería a un guerrero, creo que la tortuga también habría atormen-

---

[23] «¡Esa maravillosa primera proposición de Euclides...! —murmuró la Tortuga como en sueños—. ¿Admira usted a Euclides?» «¡Apasionadamente!» «Bien, en ese caso tomemos una pequeña parte de la argumentación contenida en esa primera proposición: dos premisas y la conclusión extraída de ellas. (A) Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. (B) Los dos lados de este triángulo son iguales a un tercero. (Z) Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí. Los lectores de Euclides concederán, supongo, que Z se sigue lógicamente de A y B, de modo que todo el que acepte lógicamente A y B como verdaderas *debe* aceptar Z como verdadera, ¿no?» «¡Sin duda! El más bisoño de los alumnos de una Escuela Superior admitiría eso» (vid. Lewis Carroll: *El juego de la lógica*, Madrid, 1976[2], p. 154).

tado a Euclides en este punto: su uso de las nociones comunes como premisas o como reglas dista de ser claro y distinto [24].

Pese a su sencillez y su cogencia intuitiva, la prueba de la proposición I 1 fue denunciada por Zenón de Sidón por envolver la presuposición tácita de que dos líneas rectas no pueden tener un segmento común pues, en otro caso, AC y BC podrían encontrarse antes de llegar a C y compartir su longitud hasta este punto, de manera que el triángulo formado por ellas y AB no sería equilátero (Proclo: *In I Eucl. Comm.*, 214.18). En realidad, este supuesto actúa más bien en otras pruebas como la de I 4 y Posidonio, erigido en defensor de Euclides, descarta fácilmente esta objeción de Zenón. Zenón bien podría haber apuntado en otras direcciones para no errar el tiro: por ejemplo, hacia el uso indiferente de BA por AB, AC por CA, CB por BC, que supone la unicidad de la recta trazada entre dos puntos dados cualesquiera o el sentido no vectorial del trazo; pero, sobre todo, contra la providencial aparición del punto C. Una presuposición implícita en la *kataskeué* de I 1, en d 3, es un postulado de continuidad que autorice o determine la existencia de este punto de intersección entre las dos circunferencias. Ni Euclides ni Zenón reparan en ello, quizás debido a la evidencia misma de la construcción diagramática. Las construcciones de este tipo desempeñan un papel capital en la geometría euclídea. Pero este recurso intuitivo metodológico viene acompañado de un procedimiento

---

[24] J. D. García Bacca, en la «Introducción filosófica» de su edic. c., (1944), explicita dos usos de esta noción: 1, como premisa de un «silogismo» de la forma: «Las cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí», «A y B son iguales a C»; luego, «A y B son iguales entre sí»; 2, como un «silogismo» mismo de relación bajo la forma: «A es igual a B; B es igual a C; luego, A es igual a C» (pp. lxxxiv-lxxxv). En 1, tendríamos un axioma o una proposición «máxima»; en 2, una «ley» o una pauta deductiva de transitividad (García Bacca no abunda en precisiones a este respecto). Ambos usos traslucen la ambigüedad de la noción común (i*): ¿es una proposición de la teoría o una regla metalingüística de deducción de las proposiciones de la teoría? Por lo demás, García Bacca también menciona el uso de las reglas del *Modus Ponens* y de sustitución (vid. las notas preliminares, pp. 39-40). Pero no creo que ésta última pueda entenderse en el sentido formalizado que hoy tiene dentro del contexto de la cuantificación lógica de variables. Aún parece más difícil creer en el extremo sugerido allí (p. 39) de que sea esta regla lógica de sustitución la que Euclides invoca con la fórmula «y de modo parecido demostraríamos...», para manifestar que demostrado un caso determinado del teorema en cuestión, cabría seguir el mismo procedimiento en la prueba de otros casos a considerar; según todos los visos, dicha fórmula es una instrucción metódica o una indicación didáctica, antes que una apelación a la regla lógica de sustitución.

no menos esencial y característico de la prueba euclídea, de las pruebas matemáticas helenas en general. Es el paso de la *ékthesis:* la exposición de una instancia concreta de la proposición en cuyos términos se desenvuelven no sólo las configuraciones que preparan el terreno para la solución de los problemas sino las demostraciones mismas de problemas, teoremas y resultados híbridos («investigaciones» o «porismas»). Esta exposición tiene repercusiones lógicas, aparte de las metodológicas. Significa el uso de abreviaturas nominales en vez de variables propiamente dichas y anuncia el problema lógico subsiguiente, el problema de la generalización del resultado obtenido sobre el caso particular considerado hasta adquirir la forma y el alcance universales de la proposición inicial. Puede ser sintomático que Euclides formule reiteradamente el objeto de la prueba: para empezar, en la *prótasis*, bajo una forma completamente general salvo que la proposición añada expresamente una cláusula condicionante o restrictiva (un *diorismós* de limitación); a continuación, en la *ékthesis* y en el *diorismós* ordinario, bajo la forma particular de un caso concreto —donde a veces, pero no siempre ni siquiera con frecuencia, Euclides tiene a bien señalar que los elementos constituyentes del caso (puntos, líneas, números, magnitudes), son elementos cualesquiera o están tomados al azar [*hà étykhe*]—; y por último, bajo esta misma forma, en la conclusión. Sólo la cláusula que afirma la consumación de la prueba, el cumplimiento de lo que había que hacer o había que demostrar, viene a dar fe de que lo concluido no es otra cosa que la proposición general enunciada al principio. Una observación de Proclo sobre la duplicación habitual en el *sympérasma* de las pruebas de los matemáticos puede ilustrar este curioso procedimiento: «Acostumbran a hacer la conclusión doble en cierto modo: quiero decir, al probarla en el caso concreto y al sacar luego una consecuencia general pasando de la conclusión parcial a la general... Y están justificados en este paso puesto que utilizan para la demostración las cosas particulares expuestas no en cuanto tales particulares sino en cuanto casos típicos del resto.» (*In I Eucl. Comm.*, 207.4-15). A pesar de la buena voluntad de Proclo, este poder intuitivo de representatividad otorgado a las instancias matemáticas, en especial a los elementos de un diagrama geométrico, sólo puede aspirar a una cobertura filosófica como la deparada por las declaraciones de intenciones de Platón o Aristóteles respecto de la significación conceptual de los trazos de los geómetras, pero carece de justificación lógica expresa. Más bien, por contra, viene a encubrir

la ausencia de una lógica de la cuantificación, y la suplantación de esta lógica por visiones intuitivas se presta en ocasiones a equívocos (e.g. en la consideración de unos múltiplos cualesquiera, «al azar [*hà étykhen*]», en la prueba de V 4 o de V 7).

El segundo ejemplo puede consistir en un teorema de la teoría generalizada de la proporcionalidad, la proposición V 10. También iré marcando los pasos y las bases deductivas de la prueba —aunque, al igual que en el caso anterior, Euclides no se detenga en ellos (vid. Stamatis (1970) II, pp. 16-17).

a. De las magnitudes que guardan una razón con una misma magnitud, la que tiene una razón mayor con ella es mayor, y aquélla con la que esta misma magnitud tiene una razón mayor es menor.

b. Tenga A con C una razón mayor que la que tiene B con C.

c. Digo que A es mayor que B.

e. Pues si no, A es igual que B o menor que B. Ahora bien, A no es igual a B pues en tal caso cada una de las magnitudes A, B tendría la misma razón con C <V 7: «Las magnitudes iguales tienen con una misma magnitud la misma razón, y también una misma magnitud tiene la misma razón con las magnitudes iguales»>; pero no es así. Luego, A no es igual a B. Por otra parte, A no es menor que B pues en tal caso A tendría con C una razón menor que B con C <V 8: «De magnitudes desiguales, la mayor tiene con una misma magnitud una razón mayor que la menor; y la misma magnitud tiene con la magnitud menor una razón mayor que con la mayor»>; pero no es así. Luego, A no es menor que B. Pero ya se había probado que tampoco es igual. Luego, A es mayor que B.

b′ Tenga C con B una razón mayor que la que tiene C con A.

c′ Digo que B es menor que A.

e′ Pues si no, es igual o mayor. Ahora bien, B no es igual que A pues en tal caso C tendría la misma razón con cada una de las magnitudes A, B <V 7>; pero no la tiene. Luego, A no es igual que B. Por otra parte, B tampoco es mayor que A pues en tal caso C tendría con B una razón menor que la que tiene con A <V 8>; pero no la tiene. Luego, B no es mayor que A. Pero ya se había probado que no era igual. Luego, B es menor que A.

f. Por consiguiente, siendo A y B magnitudes que guardan

una razón con C, si A:C > B:C entonces A > B, y si C:B > C:A entonces B < A. Que es lo que había que demostrar.

En esta conclusión he introducido una condicionalización expresa, aunque las demostraciones euclídeas se muestran tan silenciosas en este respecto como en el de la generalización lógica; también me he permitido esquematizar su formulación con los símbolos hoy usuales para «mayor (menor) que».

El teorema carece de *kataskeué* y pasa directamente a la *apódeixis*, que consiste en la reducción al absurdo de las alternativas opuestas a la que se trata de sentar. La ausencia de preparación diagramática y el insignificante papel de las representaciones de este tipo en el libro V pueden ser índices del grado de abstracción conceptual que corresponde a la teoría generalizada de la proporción. La prueba es además una muestra del género de argumentación que discurre en términos de relaciones (mayor/igual/menor): Galeno recuerda que tales argumentos descansan en axiomas —como había indicado Posidonio— y constituyen las demostraciones matemáticas por excelencia (*Introd. a la dialéctica,* XVI.5); pero las noticias que da sobre su posible estructura lógica no pasan de ser ilustraciones de las nociones comunes o axiomas más familiares (XVI.6, (i*); XVI.7, (ii*); XVI.8, (iii*)); confiesa en fin (XVII.1) que su reconocimiento de que casi todos los «silogismos» deben su fuerza demostrativa a ciertos axiomas universales, ha sido relativamente tardío.

La prueba de V 10 no considera necesario remitirse a las definiciones que encabezan el libro V sino a otros teoremas previamente establecidos. Pero, V 10 es el primer teorema sobre razones mayores o menores y la única base que Euclides parece haber previsto a este respecto es la definición 7 de V (V 8, en particular, se apoya directamente sobre ella), pues de hecho se considera obligado a probar para las razones, en V 11, una proposición pareja a la noción común (i*) que gobierna las magnitudes. En otras palabras, la lógica de las relaciones mayor/igual/menor dispuesta para las magnitudes no se aplica sin más a las relaciones de este tipo entre razones. Así pues, en el caso de V 10, no sólo concurren algunos supuestos tácitos en esta lógica de relaciones en general (e.g. el principio de tricotomía de las magnitudes y otro parejo para las razones), sino algún otro axioma específico que los comentadores de los *Elementos* han tenido que suministrar. Por ejemplo, el axioma 4º de los añadidos por R. Simson (1756) al libro V: aquella magnitud de la que un múltiplo

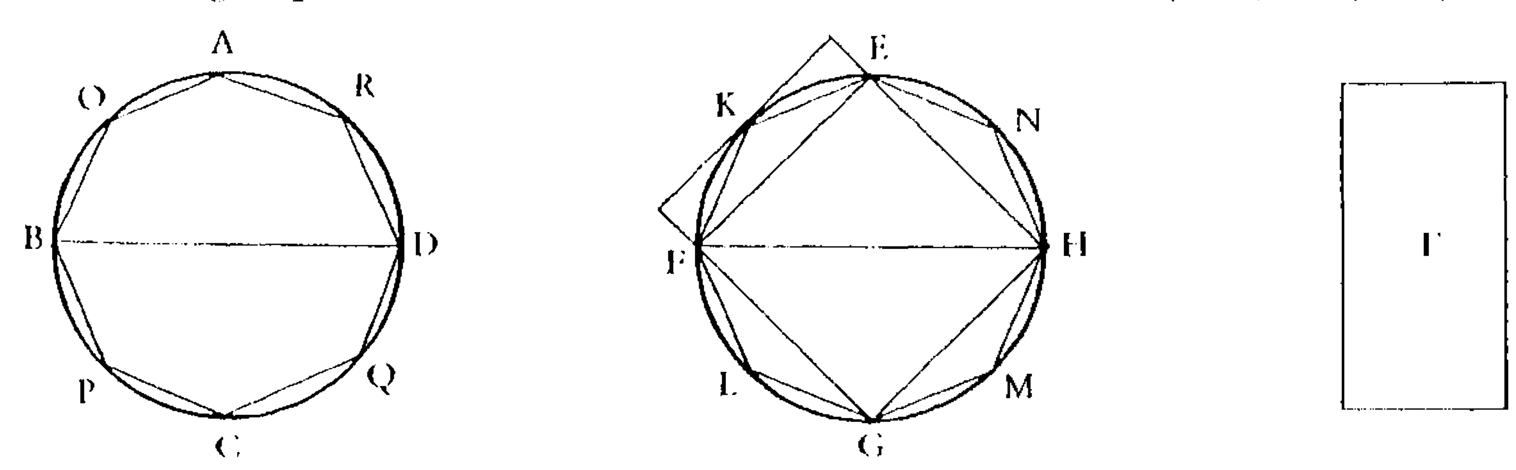
es mayor que el mismo múltiplo de otra, es una magnitud mayor que ésta otra (vid. Heath (1926)[2], edic. c. 2, pp. 137, 156-7).

El último ejemplo que vamos a considerar es la primera aplicación del mal llamado «método de exhausción» —un matemático helenístico tomaría como franca desmesura, como *hýbris*, la pretensión de agotar lo inagotable—. Se trata de la proposición XII 2 (vid. Stamatis (1973) IV, pp. 371-3). La exposición será un tanto esquemática y usará la notación actual para designar cuadrados —en vez del giro griego «el cuadrado (descrito) a partir de [*apò*]» una figura dada.

a. Los círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros.

b. Sean ABCD, EFGH círculos y BD, FH sus diámetros.

c. Digo que área de ABCD: área de EFGH :: $(BD)^2$: $(FH)^2$.



c* Supongamos que no. Entonces, $(BD)^2$: $(FH)^2$ :: área de ABCD : área Γ, siendo el área Γ menor que el área de EFGH o siendo el área Γ mayor que el área de EFGH.

d 1 Supongamos que el área Γ es menor que el área de EFGH (y entonces se da un Δ tal que EFGH − Γ = Δ, i.e. Δ es la diferencia o el exceso por el que el área EFGH sobrepasa el área Γ).

2 Sea el cuadrado EFGH un cuadrado inscrito en el círculo EFGH; el cuadrado EFGH resulta mayor que la mitad del círculo EFGH. Sean las circunferencias EF, FG, GH, HE bisecadas en los puntos K, L, M, N y únanse los puntos EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN y NE. Cada uno de los triángulos EKF, FLG, GMH, HNE es mayor que la mitad del segmento del círculo que lo rodea. Entonces, bisecando las circunferencias restantes y uniendo las líneas rectas, y procediendo así reiteradamente, resultarán algunos segmentos del círculo que serán menores que el exceso por el que el área del círculo

EFGH excede al área Γ, i.e. menores que Δ <por el teorema X 1>. Por lo tanto, el resto, a saber: el polígono EKFLGMHN, es mayor que el área Γ.

3 Inscríbase también en el círculo ABCD el polígono AOBPCQDR, semejante al polígono EKFLGMHN. Entonces $(BD)^2$: $(FH)^2$:: AOBPCQDR: EKFLGMHN <por el teorema XII 1, «los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de los diámetros respectivos»>.

e Pero $(BD)^2$: $(FH)^2$ :: ABCD : Γ. Por tanto, ABCD : área Γ :: AOBPCQDR : EKFLGMHN <por el teorema V 11, «las razones que son las mismas que una misma razón son también las mismas la una que la otra»>. Luego, ABCD : AOBPCQDR :: Γ : EKFLGMHN <por el teorema V 16, «si cuatro magnitudes son proporcionales, también son proporcionales alternadamente»>. Ahora bien, el círculo ABCD es mayor que el polígono inscrito en él. Luego, el área Γ también es mayor que el polígono EKFLGMHN. Pero, se había concluido <en d.2> que el polígono EKLFLGMHN es mayor que el área Γ. Luego, la suposición inicial <d.1: el área Γ es menor que el área de EFGH>. es imposible.

d' Supongamos que el área Γ es mayor que el área de EFGH.

e' Pues bien, inversamente, $(FH)^2$: $(DB)^2$ :: área Γ : área de ABCD <por el corolario de V 7, «si unas magnitudes cualesquiera son proporcionales, también serán proporcionales inversamente»>, y área Γ : área de ABCD :: área de EFGH : área Δ', siendo esta área Δ' alguna área menor que el área de ABCD. Luego, $(FH)^2$: $(DB)^2$ :: área de EFGH : área Δ ' <teorema V 11>. Pero esto resulta imposible <basta aplicar aquí el procedimiento seguido anteriormente>. Por lo tanto, como $(BD)^2$ es a $(FH)^2$ así no es el círculo ABCD a una área mayor que el círculo EFGH. Y ya se había probado que tampoco está en esa razón con una área menor que el círculo EFGH.

f Luego, el círculo ABCD es al círculo EFGH como el cuadrado de BD es el cuadrado de FH. Por consiguiente, los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros. Que es lo que había que demostrar.

La señal e* marca la intención básica de la prueba, una doble reducción al absurdo de las dos alternativas opuestas a la proposición que se pretende demostrar. La trama preliminar (d) obedece a este propósito. En general, las pruebas que siguen este procedimiento fundado en X 1 (XII 2, 5, 11, 12, 18) responden a una estructura y unos supuestos comunes, a saber:

Se plantean un teorema de la forma (α) «x : y :: z : w». Parten de la suposición de que la proposición (α) es falsa, lo cual conduce a suponer el caso de un término y′ que satisface la proporción (β) «x : y′ :: z : w» bajo alguna de estas condiciones (γ), y′ es menor que y, o (δ, y′ es mayor que y. Tanto la alternativa (β)−(γ) como la alternativa (β)−(δ) son reducidas al absurdo. De donde se concluye necesariamente la verdad de la proposición (α). Las pruebas de este tipo, según puede verse en X 2 en particular, conllevan entonces varios supuestos implícitos: un postulado de monotonía (si una figura está contenida en otra, el área de la primera es menor que el área de la segunda); un postulado de aditividad (si dos figuras son disjuntas, el área de su unión es la suma de sus áreas); un principio de tricotomía (el círculo ABCD está en una razón determinada con un área o mayor, o menor, o igual que el círculo EFGH; de la imposibilidad de las dos primeras opciones, se sigue la tercera); el supuesto de la disponibilidad de un cuarto término proporcional (las áreas de tipo Γ o Δ).

Pero el uso más notable del «método de exhausción» no es tanto el practicado por Euclides como el practicado por Arquímedes.

Ya he apuntado anteriormente que Arquímedes aduce no la definición 4 del libro V, sino una variante extraída de la práctica misma del método cuya relación con el criterio asumido por Euclides se puede expresar en estos términos: si dos magnitudes de cierta clase (líneas, áreas, sólidos) tienen una razón entre sí conforme a la def. 4 de V, sus diferencias también guardan una razón en el mismo sentido con cualquier otra magnitud homogénea. Aplica en esta línea un lema de bisección como el establecido en X 1, o más bien en su corolario, de modo que las sustracciones pueden tomar de la magnitud mayor, A, otra magnitud mayor o igual que la mitad de A. Las aplicaciones de Arquímedes también introducen de hecho algunas variaciones del procedimiento. Según Dijksterhuis [25], estas mo-

---

[25] Vid. E. J. Dijksterhuis (1956): *Archimedes*, edic. c., pp. 130-133.

dalidades se pueden contraer a dos tipos principales: uno recibe el nombre de «método de *compresión*»; el otro se denomina «método de *aproximación*» y es parecido al que sigue Euclides. El método de *compresión* puede considerar a su vez o bien diferencias, o bien razones en orden decreciente. En ambos casos, la magnitud M que se trata de calcular resulta —diríamos— comprimida entre una serie de inscripciones monótonamente ascendentes, I_n, y una serie de circunscripciones monótonamente descendentes, C_n; cuando se trata de diferencias, sabemos que la diferencia $C_n - I_n$ puede hacerse menor que cualquier magnitud previamente determinada; cuando se trata de razones, sabemos que la razón $C_n : I_n$ puede hacerse menor que la razón de la mayor de dos magnitudes determinadas a la menor. El cálculo de la magnitud M, dado que $I_n < M < C_n$, consiste en hallar una magnitud K que se encuentre acotada entre I_n y C_n, i.e. $I_n < K < C_n$, para un valor cualquiera de n. Entonces se concluye que $M = K$. Las pruebas envuelven en todo caso el principio de tricotomía y el recurso de la reducción al absurdo, con el fin de sentar la imposibilidad de las alternativas restantes: que $M > K$ o que $M < K$.

3.2 La cuestión de las señas de identidad de la prueba euclídea.

Las muestras que hemos visto permiten aventurar algunas características generales de la demostración practicada por Euclides en los *Elementos*.

El rasgo más llamativo es quizás la informalidad de este tipo de prueba. Esta informalidad no trunca ni debilita la cogencia intuitiva de los resultados probados; si acaso, en algunos aspectos, la refuerza y de hecho —expresa o tácitamente— los *Elementos* están detrás del recurso habitual a los diagramas geométricos y debajo de las reivindicaciones periódicas de la inteligencia intuitiva o del rigor informal en la prueba matemática frente a los ensayos de su reducción formalista. Pero, al margen de la cuestión de esa cogencia pragmática, la prueba euclídea tiene una informalidad sustancial. Quiero decir que su informalidad no consiste simplemente en la excusable ausencia de una caracterización efectiva de la noción de demostración. Las caracterizaciones de este género son el logro moderno de una antigua idea que se remonta al viejo Aristóteles: la idea de que podemos reconocer una demostración cuando nos encontramos ante ella. Con

este fin, introducimos de manera precisa todos los términos y proposiciones primitivas de una teoría deductiva, pongamos por caso T *. Asimismo determinamos la lógica subyacente en T * o, cuando menos, las reglas de deducción R_1 ...R_n por las que de unas proposiciones dadas α_1, α_2, ... pertenecientes a T * cabe derivar otra proposición α_n perteneciente a T *; se supone que el conjunto de esas reglas define la relación $R_i <\{\alpha_1, \alpha_2, ...\}, \alpha_n>$, i.e. la relación: α_n es deducible de α_1, α_2, ... en T *. Todo esto nos permite disponer de un concepto relativamente preciso de demostración en una teoría deductiva T *: si α es una proposición que guarda una relación R_i (Γ, α) con un conjunto cualquiera Γ de proposiciones pertenecientes a T*, entonces la secuencia $\Gamma^* = <\Gamma, \alpha>$ es una demostración en T *. Doy por descontado que este planteamiento, conducente a la visión de una teoría deductiva como un conjunto de proposiciones cerrado con respecto a una relación definida de deducción, resulta completamente ajeno a los *Elementos*. Euclides, en el mejor de los casos, podría aspirar no a este cierre lógico sino a una suerte de «cierre» metódico, e.g. a la delimitación de un conjunto de problemas resolubles por el método de la regla y el compás. Lo cual no excluye la posibilidad de reconstruir y formalizar efectivamente ciertos correlatos teóricos de la geometría euclidiana con miras a establecer sus propiedades metamatemáticas. Pero los resultados de este tipo de análisis —e.g.: los obtenidos por Tarski en 1930 a partir de una geometría y un álgebra carentes de la noción general de número natural— tienen que ver ante todo con lo que hoy se entiende por geometría «elemental» —e.g., la formalizable en un lenguaje lógico de primer orden—, no con los *Elementos*. Algo parecido ocurre con las axiomatizaciones modernas de su teoría de la proporción o de su aritmética: se puede decir, por ejemplo, que la teoría de la proporción del libro V es (una instancia de) un grupo abeliano totalmente ordenado de magnitudes que cumplen la condición arquimediana, pero sobreentendiendo que el planteamiento euclídeo de la teoría poco tiene que ver con la idea de estructura matemática que subyace en esa descripción.

La informalidad sustancial de las pruebas euclidianas va más allá de la obvia ausencia de formalización o de, digamos, «espíritu formal». Reside en la no explicitación de ciertas reglas lógicas, básicas y omnipresentes, y más aún en la falta misma de un horizonte lógico a pesar de que Euclides se oriente deliberadamente en una perspectiva metodológica deductiva. Dos muestras de los primero son la

práctica intuitiva de la condicionalización —llamativa sobre todo en las demostraciones indirectas—, y el uso informal de operaciones de cuantificación lógica: la instanciación en la ékthesis y el diorismós de las pruebas, y la generalización posterior en la retroproyección de la conclusión sobre la prótasis a través de la cláusula «que era lo que había que hacer (o demostrar)». El proceder de Euclides es tan natural que ni siquiera cabría asegurar que «se ha servido de tales operaciones»; y a lo más que alcanza Proclo a este respecto es a reiterar una pauta práctica tradicional de las demostraciones matemáticas: probar un caso típico particular equivale a probar el caso general planteado. En todo caso, en los *Elementos* no hay ningún aparato de cuantificación, ni debemos entender la referencia abreviada a magnitudes, números, líneas o figuras, mediante letras o sucesiones de letras, como un uso de variables propiamente dicho. Naturalmente, esta inconsciencia de las condiciones que gobiernan la cuantificación de variables lógicas no es una lacra singular de los *Elementos* sino un estado común de ingenuidad que acompañó largo tiempo tanto a la tradición del análisis lógico como a la tradición de la prueba matemática [26]. Una muestra adicional de la segunda ausencia antes indicada, la falta de un horizonte lógico, puede ser el sentido que tienen las nociones comunes en los *Elementos*. Hoy cabría leerlas como una introducción desmañada de una lógica de relaciones o, por lo menos, como la sugerencia de una lógica de la igualdad aplicada a magnitudes finitas y a ciertas operaciones elementales con ellas (en esta línea se podría entender (v *), «el todo es mayor que la parte» en los términos de Clavius: «el todo es igual a la suma de sus partes»). Sin embargo, se asemejan más a truísmos de la tradición matemática que a principios lógicos: son, como apunta Galeno (XVI.6), axiomas que tienen crédito por sí mismos. El empleo real de (i *)-(iii *) confirma esta condición de «evidencias» de sentido común, obviedades entre proposicionales e inferenciales, precipitadas por el trato conceptual con magnitudes. Marcas de un origen tradicional análogo pueden ser la ambigüedad congénita que envuelve la noción común (iv *) o la concesión de (v *) frente a otras

---

[26] W. Kneale, al glosar la importancia de las novedades lógicas introducidas por Frege (1879): *Begriffsschrift*, concluye: «En resumen, no sería exagerado calificar el empleo de cuantificadores para ligar variables como una de las grandes conquistas intelectuales del siglo XIX», en W. y M. Kneale (1961, 1968): *El desarrollo de la lógica*, Madrid, 1972; p. 472.

alternativas más operativas desde el punto de vista de las relaciones de orden, como la que aparece de hecho en la prueba de I 6.

En esta perspectiva informal no puede extrañar el papel decisivo que a veces desempeñan —sobre todo en la pruebas de problemas— las construcciones diagramáticas de figuras concretas. Son, a primera vista, un recurso de exposición introducido en la ékthesis y el diorismós de la prueba, luego desarrollado en la kataskeué. Así pues, constituyen una representación gráfica «isomórfica» de objetos, condiciones y relaciones geométricas, en un sentido próximo al que aún hoy conservan en nuestros usos escolares o didácticos. Los griegos creen tener una clara conciencia filosófica de su significado: en términos de Platón (*Rep.* VI, 510d-511a), los geómetras discurren con miras a los objetos geométricos mismos, «el Cuadrado en sí o la Diagonal en sí», y de las cosas que trazan o dibujan sólo se sirven como imágenes de aquellas otras cosas que no se pueden ver de otro modo que con el pensamiento; en términos de Aristóteles (*Apo.* I 10, 77a1-2): «pero el geómetra nada concluye del hecho de la línea que ha trazado como no sea lo puesto en claro por medio de ella». Ahora bien, esta conciencia filosófica del sentido de una representación no entraña una conciencia lógica de las operaciones envueltas en este procedimiento; más bien, por el contrario, se diría que viene a enmascararlas. Por otro lado, el uso euclídeo de los diagramas es no sólo representativo sino inferencial: la construcción diagramática puede funcionar como una producción efectiva de objetos geométricos y de relaciones entre tales objetos. Ya es sintomático que las prótasis de muchos problemas no revistan precisamente una forma enunciativa sino prescriptiva: marcan una tarea a realizar y la cláusula que remata la conclusión de la prueba levanta acta de su cumplimiento. Pero más significativo aún es el alcance entre sustitutivo y encubridor de algún postulado tácito que los diagramas llegan a tener en ciertas pruebas (sin ir más lejos en la de I 1, vid. supra). Esta intromisión puede interpretarse como un accidente intuitivo de menor importancia. Al fin y al cabo, se supone que los objetos geométricos son formaciones ideales o, cuando menos, abstractas, son objetos eternos; también es obvio que los geómetras griegos, al menos a partir del s. IV a.n.e., saben perfectamente que una manipulación gráfica no es una demostración y que los diagramas deícticos son una especie de abreviaturas plásticas de las que teóricamente podría prescindir el discurso apodíctico, sobre todo desde que cuenta con la autonomía que le brinda la escritura. Sin embargo, no

está claro el modo preciso de conciliar esta conciencia más bien filosófica con la objetivación diagramática que a veces se practica en los *Elementos*, donde figuras como un cuadrado o un polígono no sólo hacen referencia a nociones básicas de la geometría plana sino que funcionan de hecho como instrumentos de análisis, resolución y demostración. Platón mismo concedía al entendimiento geométrico un estatuto discursivo intermedio entre el mundo de la inteligencia pura y el mundo de la opinión configurado por las manifestaciones sensibles (*Rep.* VI, 511d). Pero la cuestión principal no es aquí la planteada por ciertas prácticas metódicas de la prueba geométrica en los *Elementos*. La cuestión estriba en que los *Elementos* no empiezan por definir una estructura abstracta para luego apuntar un sistema de objetos que satisfagan las condiciones estipuladas, sino que empiezan definiendo algunos de estos objetos y luego van autorizando otras objetivaciones y configuraciones de las que, al fin, resultan ciertos subsistemas de la geometría plana.

Hoy solemos identificar la singularidad de este proceder de Euclides por contraste con la axiomatización abstracta que presenta los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (Leipzig, 1899). Los *Fundamentos* de Hilbert se inician con esta conocida invitación. Pensemos tres sistemas distintos de objetos: a los objetos del primer sistema los llamamos *puntos* y los designamos con las letras A, B, C ...; a los objetos del segundo sistema los llamamos *rectas* y los designamos con las letras a, b, c ...; a los objetos del tercer sistema los llamamos *planos* y los designamos con las letras α, β, γ ... La caracterización de los sistemas y de sus relaciones mutuas se confía a los axiomas. Pongamos por caso el axioma de orden II.2: «dados dos puntos A y C, siempre hay al menos un punto B situado sobre la recta AC de tal modo que C está entre A y B». Consideremos entonces un objeto cualquiera, X: X será un punto si satisface la condición II.2 —entre otras. Así pues, las condiciones estipuladas por los axiomas especifican una estructura abstracta —que envuelve, por ejemplo, la relación ternaria de *estar entre*—; esta estructura consiste en el conjunto de todos los sistemas de objetos que pueden cumplir las condiciones axiomáticas y nos conduce, por así decir, a una selección no necesariamente unívoca de sistemas de objetos en un universo no vacío en principio. En cambio, Euclides parte de la consideración de objetos determinados, cuyas nociones se precisan en casos como el de la línea recta o el círculo mediante instrucciones de construcción. Al margen de su estatuto ontológico, ideal o abstracto, estos objetos

constituyen unas bases metodológicamente concretas de deducción, cuyo desarrollo más natural envuelve un aparato diagramático. Podemos estimar que esta vía diagramática es un recurso de exposición, una representación —diríamos «isomórfica», pero ante la ausencia de una estructura geométrica inicial convendría pensar más bien en imágenes que en «formas» de representación estructural—. Pero también es un modo de inferencia, una vía de construcción de nuevos objetos y de configuraciones derivadas igualmente concretas. De ahí el relieve sintomático que tienen las prácticas deductivas «a-lógicas» de la instanciación y la generalización. Y de ahí que uno se sienta inclinado a pensar que el ingrediente informal de muchas pruebas euclídeas es irreducible —a no ser que su lenguaje discursivo sea sustituido o neutralizado por el lenguaje de otro discurso teórico sobre la geometría—. Otros signos más vendrían a confirmar la singularidad de estas construcciones concretas de la geometría antigua: por ejemplo, la radical ausencia de discusiones o problemas acerca de lo que hoy llamamos «existencia matemática»; o, por ejemplo, las anomalías que envuelve la traducción de ciertos constructos euclídeos a las expresiones algebraicas que hoy consideramos parejas, aun en el caso más afín —al menos a primera vista— de la geometría analítica cartesiana [27].

Puestas así las cosas, ¿qué relaciones hay entre la deducción euclídea en los *Elementos* y las lógicas sistemáticas elaboradas en su medio cultural? ¿No cabría reducir las pruebas euclídeas a las lógicas de la demostración logradas por los griegos, a la silogística aristotélica o a la dialéctica estoica? Las reducciones de este tipo ¿no infundirían en las pruebas euclídeas la gracia de una fundamentación formal o de una perspectiva lógica adecuada?

La silogística aristotélica trabaja, como ya es sabido, con términos cuantificados. Pero no parece capaz de hacer justicia a la práctica de la instanciación —recordemos que el lenguaje canónico del sistema no prevé el uso de términos singulares—, ni a la práctica de la generalización. Los términos silogísticos ya son de entrada términos parcial o universalmente generales. Por lo demás, en ocasiones en

---

[27] Vid. J. Echevarría: «La reducción de las figuras geométricas a ecuaciones algebraicas», en *Actas I Simposio hispano-mexicano de filosofía*, Salamanca, 1968; t. I, pp. 180-192. No cabe suponer sin más que una construcción euclídea es la «representación gráfica» de una ecuación analítica, salvo desde una metateoría que neutralice las identidades respectivas de uno y otro lenguajes teóricos, el euclídeo y el cartesiano.

las que Aristóteles argumenta no dentro del sistema silogístico, sino sobre el sistema (e.g. en algunos pasajes que explican la reducción directa de los modos imperfectos a los perfectos como *APr.* I 5, 27a2-14 o 27a26-35), sus pruebas incurren en un procedimiento de instanciación y generalización implícitas tan informal como el euclídeo: lo cual es un síntoma no sólo de la naturalidad y extensión de este tipo de razonamiento, sino de su calidad de punto ciego para la lógica griega. Otra dificultad insuperable para la versión silogística aristotélica de la pruebas euclídeas es la deducción al hilo de nociones de relación (mayor/igual/menor). Desde un punto de vista lógico formal, estas nociones constituyen otro punto ciego de la lógica sistemática antigua. En atención a las dificultades señaladas, el problema de conciliar las pruebas indirectas —sustanciales a veces en los *Elementos*— con las reticencias de la teoría de la demostración aristotélica ante la reducción al absurdo, sólo representa una cuestión menor.

Podemos concretar algo más, en relación con el propio Aristóteles, las expectativas que la silogística demostrativa de los *Analíticos* estaría en condiciones de abrigar con respecto a unas demostraciones matemáticas como las practicadas por Euclides. No es infrecuente que los *Analíticos* ilustren con referencias matemáticas algunos puntos del análisis del silogismo. Por ejemplo, la necesidad de contar al menos con una premisa universal se muestra en *APr.* I 24, 41b13-22, aludiendo a la prueba de que los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales entre sí; es la proposición I 5, aunque Aristóteles parece referirse a una prueba distinta de la recogida en los *Elementos* (vid. Heath (1926) [2], 1, pp. 252-3). El hecho de que a veces el oficio de término medio corra por cuenta de una proposición, no de un simple término, es constatado en *APr.* I 35, 48a29-39, con la deducción de que los ángulos de un triángulo isósceles son iguales a dos rectos a través del teorema: los ángulos internos de un triángulo son iguales a dos rectos (I 32). Y en *APo.* II 11, 94a 24-35, la prueba de que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto (III 31), muestra la necesidad de dos premisas en un silogismo así como el papel explicativo de su término medio; bien que, en este caso, Aristóteles también se haga eco de una demostración preeuclídea distinta de la aducida en los *Elementos*. Pues bien, un denominador común de estas y otras referencias análogas es el servicio ya indicado de ilustraciones concretas de puntos determinados; pero en ningún caso Aristóteles se detiene en el análisis lógico de la estructura de estas pruebas matemáticas. En suma:

a/ Aristóteles reconoce sin la menor reserva el carácter concluyente y el valor demostrativo de las pruebas matemáticas.

b/ Tal vez ello le mueva a utilizarlas como eventuales ejemplos, auque no tanto de silogismos como de ciertas características silogísticas concretas; pero no parece empeñarse en una reducción efectiva por más que alguna vez se le escape alguna declaración progamática (e.g.: la famosa declaración de que las ciencias matemáticas hacen sus demostraciones mediante silogismos de la forma «Barbara», *APo.* I 14, 79a17-19). De hecho, las alusiones a esas pruebas resultan por lo regular demasiado esquemáticas y, a veces, no dejan de ser circunspectas. Un ejemplo claro de esquematismo es la referencia de *APr.* II 25, 69a30-34 a la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates de Khíos: «Supongamos que <el término> Δ es «ser cuadrado», E es «figura rectilínea» y Z es «círculo». Si entre E y Z sólo hubiera un término medio —a saber: que el círculo deviene igual a una figura rectilínea mediante lúnulas—, estaríamos más cerca del conocimiento», (sería bueno cotejar esta alusión críptica con la reseña de Simplicio, *In Phys.* 60.22-68.32, vid. supra § 1.2). Muestras de circunspección pueden ser a su vez el reconocimiento de pruebas que carecen de forma silogística, como la del teorema antes citado: los ángulos internos de un triángulo son iguales a dos rectos (conclusión no demostrable a través de un término medio, *APr* I 48a36-37), o de pruebas que la desbordan, como las reducciones al absurdo (demostraciones indirectas no silogísticas aunque en su desarrollo envuelvan algunos pasos silogísticos, *APr.* I 44, 50a29-33).

c/ La característica de las pruebas matemáticas que Aristóteles destaca es la necesidad de asunciones y de demostraciones universales (e.g. en *APo.* I 5, 74a5 ss.). Su énfasis sobre este punto le lleva a infravalorar las pruebas por casos aunque sean exhaustivas. Pero sus motivos no son tanto de orden lógico como de orden ontológico y epistemológico: responden a la prioridad que una propiedad esencial de un género de objetos (la igualdad de los ángulos del triángulo a dos ángulos rectos; la alternancia de la proporción) tiene sobre sus casos específicos de aplicación (a triángulos isósceles o equiláteros; a números o magnitudes proporcionales).

Las pruebas euclídeas ¿conocerán mejor suerte en el dominio de la lógica estoica? Su dialéctica puede suministrar el soporte de la condicionalización y de la reducción al absurdo. Pero no sólo tiene que dejar al margen el uso característico de la demostración indirecta en el marco determinado por el supuesto de tricotomía (e.g.: en las

aplicaciones de la «exhausción»), sino que se desentiende por completo del análisis de la cuantificación. La dialéctica estoica, por lo regular, no llega a ocuparse de la argumentación matemática. Pero por lo menos, después de Crisipo, los lógicos estoicos «modernos [*hoi neóteroi*]» reconocen francamente la existencia de argumentos válidos que son «no metódicamente concluyentes», la existencia de deducciones que no revisten la forma de los silogismos reconocidos por su sistema; incluso un estoico poco ortodoxo, Posidonio, presta luego atención a los *Elementos*. Como ya he sugerido al considerar la contribución estoica en el c. 3, § 3.4, no está claro si esos argumentos «no metódicamente concluyentes» se consideraban irreducibles a los patrones canónicos del sistema o si, por el contrario, se creía que su reducción era factible por el simple trámite de añadir alguna premisa sustancial implícita. La verdad es que los estoicos «modernos» no parecían alimentar grandes ambiciones reductivas al respecto —en todo caso son mucho más discretos que sus adversarios aristotélicos. Tenían buenas razones para ser comedidos en la medida en que podían hacerse una idea precisa de las condiciones que había de satisfacer un argumento para ser sistemáticamente convalidable, para ejercer de silogismos: recordemos que no bastaba la de ser lógicamente concluyente. Además el argumento debía dejar constancia expresa de todos los supuestos determinantes de la conclusión; por añadidura, tanto las premisas como la conclusión tenían que estar bien formuladas en el lenguaje propio del sistema; y, en fin, el argumento así reformulado había de encarnar la forma de uno de los modos deductivos del sistema. Pues bien, las pruebas matemáticas, por ejemplo, bastante hacían con atenerse a la primera condición.

Alejandro de Afrodisia, comentador entusiasta de Aristóteles, mantiene la opinión de que los argumentos no metódicamente concluyentes son reducibles a silogismos, aunque desde luego no está pensando en los silogismos estoicos sino en los silogismos categóricos de los *Primeros Analíticos*. Alejandro cree que la silogística aristotélica no sólo puede asimilar los silogismos del sistema estoico sino las deducciones concluyentes al margen —aparentemente— de uno y otro sistema. Para llevar a cabo tal reducción considera suficientes la declaración expresa de los supuestos tácitos y un ajuste superficial del argumento que le haga revestir la debida forma categórica (*In An. Pr.* 22 5 ss., 24 1 ss., 68 29-31, 354 24 ss.). Si el propio Aristóteles nunca se había distinguido por sus escrúpulos formalistas, las

preocupaciones de Alejandro en este sentido todavía son menores: aparte de sentar el principio de que la sustancia del silogismo reside no en las palabras sino en lo que las palabras significan (*In An. Pr.* 372 29-30), da en suponer que incluso la reducción al absurdo de la conmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal es una prueba silogística. El proceder desiderativo de Alejandro se puede ilustrar con el caso harto familiar de la demostración: «A es igual a B; B es igual a Γ; por consiguiente, A es igual a Γ». Es una deducción no metódicamente concluyente cuya reducción silogística estriba a juicio de nuestro autor (*In Top.* 14.21 ss.) en agregarle la premisa universal que sobreentiende, i.e. la noción común (i*). El silogismo que resulta es éste: «Las cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí; A y Γ son iguales a B; por consiguiente, A es igual a Γ». ¿Cuál es la forma lógica del argumento? ¿Equivale a «para todo A y Γ hay un B tal que si A y Γ son iguales a B, entonces A es igual a Γ»? ¿O más bien a «para todo A, Γ, B: si A y Γ son iguales a B, A y Γ son iguales entre sí»? La primera opción concuerda con la atribución del papel de término medio a 'B' en el argumento original y con la función del axioma universal como premisa real del argumento; pero sólo nos da un criterio particular de identificación: la igualdad con el B traído a colación. La otra opción respeta mejor el alcance general del axioma, pero desmiente la calidad de premisa sustantiva, adicional y necesaria que el axioma adopta a los efectos de la reducción, hasta el punto de que su función podría verse como la de un sucedáneo de ciertos recursos lógicos (bien el uso de variables libres como expresión de la generalidad de un aserto axiomático, o bien su cuantificación universal explícita): en todo caso, el axioma viene a ser una proposición —si no es una regla— lógica, pero no precisamente una premisa mayor. Sea cual fuere la opción que prefiramos, aún resta otra dificultad: los enunciados 'A y Γ son iguales a B', 'A y Γ son iguales entre sí', se pueden entender ya en el sentido de poseer una propiedad conjunta, ya en el sentido de guardar una relación mutua (e.g.: en el sentido de 'A y Γ tienen ambos a la vez la propiedad de ser iguales' o en el sentido propio de «A tiene una relación de igualdad con Γ»). Pues bien, la primera versión resulta un tanto abstrusa pero es la única susceptible de formalización en los términos del silogismo categórico de los comentadores aristotélicos. En general, todo intento de reducir al sistema silogístico de los *Analíticos* un argumento cuya validez dependa de las formas lógicas de la identidad o de la relación, se sal-

dará con un fracaso. Entonces los aspectos más llamativos del análisis reductivo de Alejandro no son su liberalidad en el trato con las formas lógicas ni sus ambiciones fallidas, sino más bien el tener que recurrir a sucedáneos teóricos y metodológicos de la lógica de relaciones, a premisas del tenor de «las cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí» o del tenor de «lo que es mayor que una cosa es mayor que cualquier otra cosa menor que aquélla» —verdad universal que, según Alejandro, habría que añadir así mismo al argumento: «lo primero es mayor que lo segundo; lo segundo es mayor que lo tercero; luego, lo primero es mayor que lo tercero», para que fuera objeto de la correspondiente bendición silogística. En suma, entre los lógicos, volvemos a encontrarnos con verdades palmarias sobre magnitudes, nociones comunes o axiomas universales cuya evidencia intuitiva no llega a compensar la oscuridad de su estatuto lógico.

Ahora conviene recordar a Posidonio pues, al parecer, él fue el primero en identificar la clase de los silogismos concluyentes «en virtud de un axioma [*katá dýnamin axiómatos*]». Galeno, en su *Introducción a la dialéctica*, indica que por «axioma» hay que entender aquí una proposición digna de crédito por sí misma y hace referencia a estos silogismos en términos un tanto ambiguos: en xvii 1 declara que casi todos los silogismos deben su condición lógicamente concluyente a la fuerza demostrativa de un axioma; en xvii 7 extiende esta deuda a la mayor parte de lo «que los hombres argumentan o demuestran»; pero en xvi 1 había designado como tercera clase de silogismos —a la par que los silogismos categóricos aristotélicos y los silogismos hipotéticos estoicos— a los silogismos que discurren «conforme a la relación [*katà tò prós ti*]»; en xvii 1 parece subsumir bajo la presencia de axiomas universales diversos géneros de silogismos (conforme a la relación, según lo más y lo menos, de acuerdo con lo mismo y con la proporción), para luego asegurar en xviii 8 que todos estos silogismos son del género de los relacionales y su constitución específica obedece a la fuerza demostrativa de un axioma. La ambigüedad más notable reside, sin embargo, en el estatuto de los axiomas en cuestión: no sabemos si es lógico o teórico, si su invocación se debe a consideraciones de orden formal o a consideraciones de orden metodológico. En otras palabras, los axiomas universales, en los que descansan esos silogismos, ¿son reglas o proposiciones lógicas subyacentes, que no sería preciso ni provechoso añadir a la argumentación, o son una premisa primordial cuyo alinea-

miento expreso es obligado para tornar cabal el argumento? De las referencias de Galeno no se desprende inequívocamente una u otra opción, ni se infiere siquiera una distinción entre ambas. Así pues, estas referencias tampoco establecen que el reconocimiento de Posidonio tenga una significación lógica formal y que los axiomas que él vindica sean principios lógicos o reglas lógicas que aseguran la validez del silogismo [28]. Otras noticias sobre Posidonio dan cuenta de su interés en vindicar la suficiencia de la base deductiva de los *Elementos* frente a quienes denunciaban, como Zenón de Sidón, la existencia de lagunas y de supuestos implícitos en las pruebas euclídeas (Proclo: *In I Eucl. Comm.*, 199.3-200.6, 214.15-218.11). A su luz, la contribución de Posidonio cobra todos los visos de un análisis no lógico sino metodológico, y su identificación de los argumentos concluyentes en virtud de axiomas bien puede representar un paso más en la línea de reconocer las peculiaridades de la demostración matemática y la legitimidad de las pruebas concluyentes al margen de los sistemas silogísticos disponibles. Esta es desde luego la interpretación más congruente con el marco de presentación en que los sitúa Galeno.

Galeno, por su parte, encomia la importancia matemática y la identidad propia de los silogismos que concluyen conforme a la relación, pero no repara en su análisis formal ni apunta una perspectiva lógica de la relación —al menos en la precitada *Introducción a la dialéctica*—. Es decir: no se detiene a explicar la validez de tales silogismos en razón de un planteamiento formal o sistemático de una lógica de relaciones, sino que más bien examina por separado muestras de diversos tipos con el fin de determinar la existencia de un axioma que funde en cada caso el carácter concluyente de esa deducción (xvi 1-13). E.g.: «Como dije, entre los matemáticos y logísticos (expertos en el cálculo) hay gran cantidad de tales silogismos, a todos los cuales es común el tener la causa de su constitución concluyente *[systáseos]* en ciertos axiomas; haciendo mención de ellos en los argumentos ... podremos con más claridad reducir tales silogismos a proposiciones categóricas. Así que siendo universal este axioma que tiene crédito [*pístin*] por sí mismo, «las cosas iguales a una misma, también son iguales entre sí», es posible argumen-

[28] Cf. la interpretación demasiado optimista —a mi juicio— de I. G. Kidd (1978): «Posidonius and logic», art. c., pp. 278-80 en particular.

tar concluyentemente y demostrar, como hizo Euclides la demostración en el primer teorema probando que son iguales los lados del triángulo; ya que las cosas iguales a una misma, son también iguales entre sí; pero se ha probado que la primera y la segunda son iguales a la tercera, <luego> la primera sería así igual a cada una de ellas. » (xvi 6-7). Las muestras consideradas son casos de silogismos conforme 'a la relación', 'a lo más y lo menos', o 'al mismo modo y en proporción' (e.g.: «Si Sofronisco es padre de Sócrates, Sócrates es hijo de Sofronisco», xvi 10; «si una cantidad cualquiera fuera el triple de otra, y otra cantidad fuera a su vez el triple del triple, la cantidad mayor sería nueve veces mayor que la menor», xvi 3; «como lo primero es a lo segundo, así también lo tercero a lo cuarto; pero, lo primero es el doble de lo segundo; luego, lo tercero es el doble de lo cuarto», xviii 5). Pues bien, los axiomas universales detectados son truísmos de sentido común u obviedades matemáticas, según el tenor del argumento, que conviene expresar de modo universal y categórico para que «la constitución del argumento sea más recia *[biaióteron estì he sýstasis toû logismoû]*», xvi 11 (e.g., por lo que toca a los citados, respectivamente: «a quien alguien tiene por padre, de él es hijo»; una propiedad de la aditividad no explicitada por Galeno; «de los que una razón universal es la misma, de éstos también todas las razones particulares son las mismas»). La contribución de Galeno, en principio, apenas difiere de las explicaciones de axiomas que poco después de él hace Alejandro, aunque su eclecticismo sea más de agradecer que el afán reductivo de éste último.

En conclusión, ciertas peculiaridades de las pruebas matemáticas llegaron a ser suficientemente reconocidas como para merecer un apartado propio: se clasificaron al margen de los silogismos convalidados por los sistemas lógicos disponibles, el aristotélico y el estoico, sin menoscabo de su legitimidad y su cogencia. Pero, por otro lado, no parece que las luces lógicas de la cultura griega antigua fueran capaces de analizar sistemáticamente o de «teorizar» la informalidad intuitiva de la deducción practicada en los *Elementos*. Y, por último, está claro —supongo— que no hay motivos para pensar que alguna de las lógicas que devienen canónicas en ese medio constituye «la lógica subyacente» de los *Elementos*.

3.3 La cuestión de la «axiomatización» euclídea.

Es frecuente oir y leer referencias a la «axiomática euclídea» como si los *Elementos* encarnaran algún tipo genuino de axiomatización o constituyeran una muestra cabal de uso —el espécimen primigenio— del método axiomático.

Por ejemplo, S.C. Kleene (*Mathematical Logic,* New York, 1967; c. 4, § 36) entiende por «axiomatización material» una axiomática que, dice, es del tipo de la de Euclides, a saber: la axiomática compuesta por definiciones que acotan el significado intuitivo de los términos básicos —'punto', 'recta', 'plano'—, proposiciones que se juzgan inmediatamente aceptables a partir de esos significados intuitivos —axiomas o postulados—, y proposiciones derivadas por medio de la lógica —teoremas—. El rasgo distintivo de las axiomatizaciones de este género es el hecho de que los términos primitivos tienen de entrada una interpretación, una aplicación unívoca a un sistema determinado de objetos del que se ha abstraído —se supone— la significación conceptual propia de tales términos. W. Stegmüller (*The Structure and Dynamics of Theories,* New York/Heidelberg/Berlín, 1976; P. I, c. 2, § 2.1) define a su vez un sistema axiomático «euclídeo» en estos términos: Σ es un sistema axiomático euclídeo si y sólo si Σ es una clase de enunciados y hay una subclase finita Δ de Σ tal que sus miembros son autoevidentes y por ende verdaderos, y cada miembro de la clase diferencia $\Sigma - \Delta$ es una consecuencia lógica de Δ (los miembros de Δ son los axiomas del sistema Σ). Estas nociones, bastante populares entre metodólogos y filósofos de la ciencia, responden primordialmente a nuestras ideas actuales sobre la axiomatización *formal* —en el primer caso— y sobre la axiomática *abstracta* —en el segundo—, ideas deudoras de la evolución de Hilbert y del desarrollo contemporáneo de la metodología deductiva. Su caracterización de la «axiomática euclídea» es candorosamente retrospectiva. Pero, en realidad, carecen de pretensiones historiográficas, interpretativas. Peor sería que las tuvieran, pues entonces su descontextualización de la práctica euclídea resultaría no sólo una ocultación sino una suplantación del contexto original.

Sin embargo, hay casos en los que un punto de vista parecido da lugar a retroproyecciones o reconstrucciones pretendidamente históricas que tratan de explicar las peculiaridades de la axiomática euclídea de los *Elementos*, sin cuestionarse el sentido de ponerse a

explicar algo que quizás ahí no haya existido: una axiomática o un método axiomático propiamente dichos.

Por ejemplo, D. Lacombe (1949-1950: «L'axiomatisation des mathématiques au III siècle avant J. C.,», art. c), quiere caracterizar la que llama «axiomática antigua» de los *Elementos* a partir de una axiomática actual «ingenua (naïve)». Supongamos un dominio intuitivo matemático básico correspondiente a una fase histórica de desarrollo del pensamiento, D, cuyas propiedades inmediatas se podrían explicitar, aunque no exhaustivamente, mediante unas nociones comunes, E. Sea P una porción de D. Supongamos que todas las propiedades de P se dejan deducir de un sistema finito S entre ellas. S comprenderá entonces tanto las definiciones como los postulados —en general, los axiomas— de una teoría P construida sobre D. La diferencia entre la axiomatización «antigua» y la moderna «ingenua» reside en que la primera procede sobre la base de las nociones concretas, geométrico-físicas, mientras que la segunda procede a partir de conceptos abstractos. No obstante, la antigua deducción geométrica griega sólo hace intervenir las propiedades intrínsecas de esas nociones concretas, de modo que alcanza pleno poder demostrativo. Por lo demás, esta deducción geométrica confía no tanto en la necesidad absoluta de sus postulados como en su necesidad relativa: en la validez de la forma condicional «si S, entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$», donde α_i son las proposiciones que componen el cuerpo de teoremas de la teoría presidida por S. De ahí proviene, según Lacombe, el aire relativamente moderno del ideal científico de la matemática del s. III a.n.e.: su lógica no trata de dar al mundo material un fundamento necesario sino una estructura inteligible. Y esta estructura es la propiciada por S, un sistema postulacional. ¿Qué hemos de pensar de esta tentadora versión? Bueno, es posible que la comparación entre los pronunciamientos aristotélicos sobre las dimensiones ontológica y epistemológica de los *arkhaí* demostrativos y el silencio de Euclides o el pragmatismo de Arquímedes a este respecto, dé a esta interpretación de Lacombe visos de verosimilitud. Una diferencia entre los principios aristotélicos y los geométricos puede ser la que media entre la dignidad y prioridad intrínseca de los primeros y la selección un tanto funcional de los segundos en orden a cubrir las necesidades de la deducción de ciertos resultados conocidos (¿herencia del análisis?) Pero lo que resulta difícil de creer es la imagen de arquitecto de la deducción de la escuela italiana del *novecento*, la imagen de aprendiz de Peano, que el enfoque de La-

combe proyecta consciente o inconscientemente sobre el viejo Euclides.

En lo que sigue no voy a discutir las reconstrucciones de este tipo, las inspiradas por nuestras concepciones de la axiomatización formal, abstracta o postulacional. Bien están para lo que sirven: para dar a contraluz un perfil acabado de estos usos modernos del método axiomático [29].

Los problemas que voy a considerar se centrarán más bien en torno a la posible significación original de la composición deductiva de Euclides. Tendrán que ver con la discusión de las deudas internas (matemáticas) y externas (filosóficas y metodológicas) que habría que endosar a los *Elementos*, con el pronóstico de los motivos que parecen presidir este tratado y, en definitiva, con el diagnóstico del carácter y del alcance «axiomáticos» que podríamos atribuirle. Todas estas cuestiones están entrelazadas. Quizás el contexto general de la discusión sobre el sentido de los *Elementos* sea el enmarcado por dos hipótesis hermenéuticas a las que calificaré de «hipótesis *míni-*

---

[29] Algo parecido cabe pensar de ciertas reconstrucciones sistemáticas que tratan de amoldar la historia de la matemática a conceptos estructurales y modelos abstractos. Un buen ejemplo, debido a su relativa finura, es la empresa acometida por P. Freguglia (1982): *Fondamenti storici della geometria*, o.c. Freguglia la describe como un intento de realizar una especie de «metamatematica sulla storia della matematica» (p. 20) y para ello emplea un concepto general de teoría matemática axiomática que incluiría muestras tomadas de los *Elementos* estructuralmente semejantes a otras procedentes de los *Arithmetices Principia* de Peano (1889). Una *teoría matemática axiomática* es aquí un par $<L, M>$, donde L es un lenguaje objeto natural suplementado con términos o con símbolos matemáticos y M es, a su vez, la séxtupla $<\Gamma, A, A^*, Df, Th \{\emptyset_i\}>$. Γ es un conjunto de reglas lógicas —a él pertenecen básicamente el *Modus Ponens* y la regla de sustitución—; A, un conjunto de axiomas lógicos; A^*, el conjunto de axiomas específicamente matemáticos; Df y Th son los conjuntos respectivos de definiciones y teoremas de la teoría; las funciones $\emptyset_i$ vienen a ser, en fin, esquemas de aplicaciones demostrativas, metafunciones que asocian unívocamente miembros de Th a subconjuntos del par $\Gamma \times E$ (donde E esta compuesto por elementos del conjunto unión $A + A^* + Df + Th$). En esta perspectiva sistemática salen a la luz determinados casos de afinidad conceptual entre diversas muestras teóricas, pero se ocultan sus peculiaridades deductivas y demostrativas. A fin de cuentas, la geometría de Euclides resulta una teoría matemática axiomática no formal, una especie del mismo género que la aritmética de Peano (p. 323), y ese género se contrapone al de las teorías formales constituido por otras dos especies, la no puramente sintáctica de Hilbert y la puramente sintáctica representada por la geometría elemental de Tarski (p. 324). Freguglia no parece cuestionarse en ningún caso la noción de axiomatización o de prueba deductiva involucrada en cada uno de ellos.

ma» e «hipótesis *máxima*». Según la hipótesis *mínima*, los *Elementos* no son sino una recopilación ordenada y sistemática a efectos instructivos y didácticos del conocimiento matemático básico disponible en el filo de los ss. IV y III a.n.e., no abrigan mayores pretensiones que las de un manual disciplinario. Conforme a la hipótesis *máxima*, los *Elementos* son el modelo que funda nuestra axiomática clásica y la obra que instaura la geometría como ciencia axiomática del espacio. A estas alturas no descubriré ningún secreto —sobre todo después del breve repaso dado en §§ 2.3 y 2.4 a la constitución y al contenido de los *Elementos*—, si confieso que las dos hipótesis me parecen erróneas, una por defecto y la otra por exceso. Los *Elementos* son originariamente algo más que el manual por excelencia en el que han aprendido geometría generaciones sucesivas de estudiantes hasta el siglo pasado; pero, por el otro lado, no constituyen el arquetipo fundacional del método axiomático clásico y a lo sumo representan una primicia (un pre-texto, una fuente de inspiración o un motivo de referencia retrospectiva) a este respecto.

Volvamos sobre los *arkhaí* euclídeos en particular: ¿cuál podría ser su estatuto «axiomático»? Ya tenemos alguna noticia sobre el sentido del aparato de nociones comunes, postulados y definiciones de los *Elementos*. En principio, significan el paso desde unos *arkhaí* más bien ocasionales —como los empleados por Hipócrates de Khíos o los mencionados en los primeros diálogos platónicos bajo el título de «hipótesis»—, hasta unos principios sistemáticos. Con Euclides, su dimensión sistemática viene a manifestarse tanto en el orden de la deducción como en el orden de la exposición disciplinaria, según conviene a un tratado «elemental». En todo caso, revisten la forma de principios básicos y asunciones no susceptibles de prueba en el alzado de los *Elementos*. Las nociones comunes representan, sin mayores pretensiones de explicitación exhaustiva, proposiciones obvias de carácter sumamente general abstraídas del trato deductivo con las magnitudes en la primera mitad del s. IV a.n.e. Pero el estatuto de las nociones comunes, entre lógico y sustantivo, queda un tanto indeterminado hasta el punto de que un matemático del talento de Apolonio probará a demostrarlas y los comentadores de Euclides dudarán si reducir su número o aumentarlo. Quizás la reducción responda a un sentido más fino de la sistematización acumulativa de la deducción, donde la obtención de nuevos resultados puede fundarse directamente sobre los ya probados en lugar de remitirse una y otra

vez a los axiomas «dignos de crédito por sí mismos»; mientras que la multiplicación de estos axiomas tal vez venga inducida no sólo por la existencia de lagunas en la base de las relaciones entre magnitudes sino por el prurito de explicitar la premisa más general de ciertas demostraciones típicas —en la línea que parecen tomar los observadores lógicos de la prueba matemática como Galeno o Alejandro. Los postulados y las definiciones son más bien asunciones dirigidas a la organización deductiva de determinados cuerpos de conocimiento. Las definiciones especifican los objetos primordiales y las nociones distintivas de un campo temático (la geometría plana, la teoría de la proporción, la aritmética, la clasificación de inconmensurables, la geometría del espacio); tienen una responsabilidad principal en la autodeterminación de algunos de estos ámbitos como teorías hasta cierto punto autónomas; pero la asumen con dos peculiaridades que distinguen estas definiciones de las habituales en un método axiomático: una es la de mantener el uso intuitivo de las nociones definidas, y otra es la de acotar objetos o nociones relativamente independientes. Los postulados son supuestos o condiciones precipitadas por la tradición matemática en la resolución de problemas y en la prueba de teoremas: condiciones de construcción efectiva del tenor de los postulados (i)-(iii) o supuestos demostrativos adoptados con el fin de evitar peticiones de principio según acontece —al parecer— con el postulado (v). El uso euclídeo de todos estos *arkhaí* revela un profundo sentido de la organización deductiva: los discursos capaces de defenderse y explicarse a sí mismos no soy ya las demostraciones particulares, sino ciertos cuerpos teóricos más o menos definidos y autónomos. Hay varias señales en los *Elementos* de esta madurez sistemática relativa: alguna es tan notoria como el cuidado puesto por Euclides en la confección de tres libros (el I, el V, el VII) que sientan las bases de tres teorías relevantes en la tradición matemática griega; otras consisten en detalles casi nimios de procedimiento, e.g. la norma euclidea de desarrollar la secuencia acumulativa de las pruebas y no retrotaerse a una asunción primera a menos que sea preciso. Sin embargo, de todo esto no se sigue una conformación deductiva lineal y uniforme de los *Elementos*, ni mucho menos su constitución axiomática.

Creo que no tenemos motivos para atribuir a los *arkhaí* euclídeos la calidad de «axiomas» en un sentido que vaya más allá de su carácter de principios y asunciones no demostrables a juicio del autor de los *Elementos*, o de su eventual contribución a la autodetermina-

ción conceptual de algunos campos de conocimiento matemático. La verdad es que el significado mismo de esos *arkhaí* ya es de por sí bastante problemático. Por un lado, su caracterización general da lugar a no pocos problemas en la medida en que la distribución en nociones comunes, postulados y definiciones se resiste a criterios unívocos y uniformes de clasificación —incluidos los diversos criterios al respecto que antes había arbitrado Aristóteles o que después sugieren algunos comentadores griegos de los *Elementos*—. Por otro lado, los *arkhaí* de los *Elementos* dejan bastante que desear desde el punto de vista sistemático y deductivo.

Los problemas de interpretación suscitados por la distribución euclidiana eran de esperar habida cuenta de las licencias terminológicas y conceptuales que los matemáticos griegos solían tomarse a propósito de sus *arkhaí* antes y después de Euclides (vid. supra, § 2.3). Y, en efecto, la resistencia de las nociones comunes, postulados y definiciones de los *Elementos* a los criterios de clasificación disponibles en su medio matemático o metodológico colma nuestras expectativas. Proclo menciona tres de estos criterios. Uno, atribuido a Gémino, distingue entre los axiomas y los postulados en razón de la mayor especialización de los primeros en la prueba de teoremas, y de los segundos en la solución de problemas (*In I Eucl. Comm.*, 178.12-179.8). Otro criterio, quizás elaborado a partir de Aristóteles, confiere a los axiomas la dignidad de principios comunes y generales sobre la cantidad y la magnitud, y asigna a los postulados el papel de asunciones específicamente geométricas (182.6-14). El tercero —puede que también de raíz aristotélica— entiende que los axiomas son principios dignos de crédito por sí mismos y no susceptibles en absoluto de prueba, mientras que los postulados son asunciones confirmadas por alguna suerte de demostración (182.21-183.13). A los tres cabe añadir una identificación de las definiciones como expresiones de propiedades esenciales de los objetos, a las que no compete desempeñar funciones genéticas o constructivas (funciones más propias de los postulados). La eficacia del primer criterio se ve neutralizada en los *Elementos* por varios factores: por la prueba relativamente indiferenciada, al menos en la fase de la *apódeixis* (vid. supra, § 3.2), tanto de problemas como de teoremas; por la existencia de resultados que no responden ni a una ni a otra condición, «porismas *[porísmata]*», que Euclides plantea en el sentido antiguo de este término como cuestiones que se proponen hallar algo que no es sencillamente una construcción ni está simplemente sujeto a una deter-

minación teorética, e.g. el hallazgo del máximo común divisor en VII 2-3 o el hallazgo de la medida común máxima en X 3-4; y, en fin, por la existencia de investigaciones híbridas que se plantean una construcción para demostrar las propiedades o relaciones subsiguientes, e.g. la construcción de sólidos regulares dentro de una esfera en la línea de XIII 13-17. El segundo criterio resulta desmentido por la noción común (vi*), «las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí», cuyo significado parece específicamente geométrico: viene a hacer las veces de un postulado de superposición —e.g. en las pruebas de I 4, 8—, o incluso de una definición de la congruencia geométrica; por lo demás, la especificación de los campos teóricos cubiertos por los *Elementos* suele correr a cargo de las definiciones (no hay postulados para las magnitudes proporcionales o inconmensurables, ni para los números, ni para los sólidos; de ahí que, en ocasiones, una definición haya de cumplir el cometido que hoy asignaríamos a un postulado matemático, e.g. la def. 4 del libro V en la prueba del lema X 1). A la luz del tercer criterio no tendría sentido el empeño en demostrar el postulado (v) con el fin de establecer su carácter de teorema y apearle el tratamiento original de postulado [*aítema*], ni habría lugar para la distribución tripartita de los supuestos en axiomas o nociones comunes, definiciones y postulados. Y por último, el cuarto criterio acerca de las definiciones viene a tropezar con la existencia de definiciones genéticas (e.g. las def. XI 14, 18 y 21, que describen la esfera, el cono y el cilindro, respectivamente, como sólidos generados por figuras planas que rotan alrededor de un eje fijo), con la existencia de definiciones que cumplen la tarea de un postulado y con la existencia de postulados que revisten la forma de condiciones definitorias (e.g. el postulado (iv), que asevera la igualdad de todos los ángulos rectos, o el postulado (v), que sienta el criterio euclídeo de las paralelas).

Pero al margen de estas dificultades para identificar los diversos tipos de principios y asunciones que presiden los *Elementos*, su expresión y su cometido tampoco son muy afortunados si los consideramos desde el punto de vista del método axiomático. Los *arkhaí* euclídeos no son cada uno de ellos un principio necesario ni forman todos ellos un conjunto de principios suficiente para la deducción de los cuerpos teóricos que toman a su cargo.

Los excesos y las concesiones un tanto gratuitas —repito que desde un punto de vista sistemático deductivo— se echan de ver en ciertas definiciones. Las deff. I 1 de *punto* y VII 1 de *unidad* res-

ponden a motivos implícitos más filosóficos que matemáticos; las deff. I 2-7, I 19 o V 3, carecen de empleo propiamente dicho; más aún, hay términos que tras ser objeto de una definición —digamos—«técnica», nunca vuelven a ser ni siquiera mencionados (e.g.: los términos 'oblongo *[heterómekes]*', 'rombo *[rhómbos]*,' 'romboide *[rhomboeidès]*' incluidos en la def. I 22 de los cuadriláteros, el término 'sector *[tomeùs]*' cuya noción ocupa la def. III 10). No es fácil adivinar las razones que guiaron la introducción, en particular, de estos últimos parásitos.

Ahora bien, la insuficiencia de los principios y asunciones de Euclides tiene todavía mayor importancia para las pretensiones deductivas de los *Elementos*. Sus imperfecciones en este sentido ya fueron observadas por los colegas alejandrinos y por los comentadores y editores helenísticos, que mantuvieron un sostenido empeño en la elucidación de supuestos no declarados por Euclides y en la prueba de lemas adicionales. Proclo llega a distinguir tres métodos para el descubrimiento de estos lemas— el análisis, la división y la reducción al absurdo—, y hasta cierto punto da a entender que una de las principales ocupaciones de los geómetras de su tiempo consistía precisamente en la investigación de este género de proposiciones (*In I Eucl. Comm.* 211.1-212.4). Algunos historiadores de la matemática suelen ver aquí un síntoma del síndrome de estancamiento que empieza a afectar a la ciencia helenística después del gran siglo III a.n.e.: es un diagnóstico algo aventurado por no apreciar otras líneas de desarrollo más o menos marginales de la tradición matemática griega y no replantearse el alcance y sentido de esa imagen tópica de decadencia. Este no es el lugar y el momento de hacerlo. Pero sí conviene dejar constancia de que esa dedicación «menor» a completar la obra geométrica de Euclides es harto elocuente como síntoma de la normalización disciplinaria de la geometría euclidiana; por lo demás, es una labor que luego pasa a manos árabes y que, en definitiva, todavía alcanza a editores y comentadores de los ss. XVIII (e.g. G. Saccheri, R. Simson) y XIX (e.g. A. De Morgan).

Algunas muestras de las insuficiencias deductivas de los *Elementos* pueden ser las siguientes (están entre las señaladas en § 2.4, al hacer una revisión sumaria de los libros de los *Elementos*). En la base de la geometría plana del libro I falta, (como hemos podido ver en más de una ocasión, cf. también la prueba de I 1 en § 3.2), un postulado de continuidad que prevea la existencia de puntos de in-

tersección de rectas y círculos, y de círculos con círculos —si es cierto que el caso de la intersección de rectas con rectas viene previsto en el postulado (v)—. En la base de la teoría de la proporción del libro V, faltan axiomas de orden y postulados que aseguren la existencia de la m-parte de una magnitud y de un cuarto término proporcional (vid. § 2.4, B). En la base de la aritmética del libro VII falta una conceptualización expresa de la noción de medida y de la relación: X mide a Y (o Y es medido por X) un número determinado de veces; tampoco se caracterizan las condiciones de la adición subyacentes en el uso de la multiplicación como una serie de adiciones abreviadas. Hasta el libro X, en el que se encuentran la teoría generalizada de la proporción entre magnitudes y la idea de proporción numérica, nada hace prever la existencia de una relación básica entre números y magnitudes. En la geometría del espacio de los libros XI-XIII se hace notar por último la falta de postulados que aseguren las relaciones de planos y puntos, planos y rectas, planos con planos, y autoricen una generación de planos análoga a la generación de rectas postulada en la geometría plana. A estas insuficiencias teóricas y metodológicas podemos agregar otras deficiencias conceptuales y sustanciales: no hay en los *Elementos* una concepción general y precisa del espacio geométrico, ni una especificación estructural del sistema de objetos que satisface (menos aún de los sistemas de objetos que pueden satisfacer) las condiciones axiomáticas que —a través de las reconstrucciones modernas de los *Elementos*— caracterizan una geometría euclidiana; no hay un concepto general de magnitud ni están fijadas las propiedades de ciertas operaciones básicas con magnitudes; no hay un concepto general de número. Ahora bien, la utilización real de un método axiomático no solamente envuelve, a mi juicio, la organización sistemática de un cuerpo de conocimientos bajo la forma de una teoría deductiva, en la que se designa como «axiomas» un conjunto determinado de asunciones primitivas o proposiciones indemostrables dentro de la teoría, para luego iniciar a partir de este conjunto los procesos de deducción que vayan integrando como asertos demostrados el resto de las proposiciones que componen la teoría. Creo que una axiomatización propiamente dicha supone además: (i) la condición de que las asunciones o proposiciones designadas, «axiomáticas», sean necesarias y suficientes para la deducción concluyente de cualquier otra proposición perteneciente a la teoría; (ii) la determinación estructural de algún sistema de objetos de referencia de la teoría. A la luz de estas indicaciones, ¿qué

podemos pensar de una «axiomática euclídea»? Las teorías que forman parte de los *Elementos* discurren al margen de cualquier determinación estructural sistemática de su universo de discurso (recordemos que las definiciones euclídeas suelen describir nociones intuitivas y relativamente independientes). Podemos considerar que la condición axiomática (ii) es ajena a los *Elementos*, aunque no todas las partes del tratado se mantengan igualmente distantes de ese punto de vista estructural: la teoría generalizada de la proporción del libro V parece aproximarse a él más que ninguna otra de las que conforman los *Elementos*; su grado de abstracción es claramente superior, por ejemplo, a la perspectiva constituida por los objetos y las construcciones concretas en la que se mueve la geometría plana del libro I. Pero, en todo caso, las teorías desarrolladas en los *Elementos* distan de cumplir la condición (i). Con esto no me refiero precisamente a la informalidad de las pruebas euclidianas ni al hecho de que Euclides no se ocupe de explicitar la lógica subyacente en su práctica de la demostración matemática; simplemente me refiero a las insuficiencias teóricas y metodológicas, desde el punto de vista sistemático y deductivo, que he señalado antes. Así pues, los *Elementos* no son una muestra cabal de lo que hoy suele denominarse «la axiomática euclidiana». A lo sumo representarían una especie de primicia de lo que la tradición geométrica posterior, desde las visiones programáticas del «orden geométrico» alumbrado por el s. XVII hasta las culminaciones prácticas del método axiomático clásico en el s. XIX, fue logrando en tal sentido.

Esta conclusión provisional no cancela la discusión en torno al posible sentido «axiomático» de los *Elementos*. Aunque hayamos descartado una tesis fuerte a este respecto, a saber: la tesis de que los *Elementos* son una muestra cabal de aplicación del método axiomático clásico, resta por considerar una versión más débil a tenor de la cual los *Elementos* abrigarían cuando menos una intención axiomática. Si atendemos a algunas de las razones por las que Proclo afirma la excelencia de esta obra, como la discriminación selectiva que gobierna su composición o la continuidad y el buen orden de las pruebas (*In I Eucl. Comm.*, 69.4-27), podremos convenir en que tal atribución no deja de ser en principio razonable.

Una intención de este género puede responder a motivos más bien internos, relacionados con el desarrollo mismo de la tradición matemática, o a motivos externos, impuestos por desarrollos de otro tipo, dialécticos y filosóficos. Por lo que concierne a los primeros,

me limitaré de momento a dos breves observaciones. En primer lugar, conviene desconfiar de pseudoexplicaciones triviales como la siguiente: la axiomatización deductiva de los *Elementos* de Euclides surge a consecuencia de la necesidad de ordenar y sistematizar un cúmulo de resultados conocidos; este motivo sirve a los propósitos de una racionalización retrospectiva, de una reconstrucción «racional», pero no depara mayor o mejor comprensión histórica. ¿A qué responde, a su vez, esa presunta «necesidad»? ¿Por qué se deja sentir ante todo en geometría y no se manifiesta del mismo modo en otros ámbitos tan elementales y venerables como la «logística» o, incluso, la aritmética? ¿Qué distingue entonces a los *Elementos* de Euclides de las demás compilaciones de elementos que producen los griegos antes y después de Euclides, tanto en matemáticas como en algunas otras disciplinas (e.g. astronomía)? En segundo lugar, conviene recordar que si la conciencia de un creciente rigor en el uso de las pruebas tiene ciertamente raíces internas matemáticas —vid. supra, c. 1, en especial § 1.3—, también viene acompañada por otras presiones externas, dialécticas y filosóficas, en un sentido análogo: en el sentido de un análisis de las condiciones de una demostración propiamente dicha y en el sentido de las demandas de un orden de inteligibilidad y de una exposición racional del conocimiento disponible en un dominio científico dado. Ya hemos observado la existencia de presiones de este tipo en el círculo de la Academia platónica en el que se movieron algunos matemáticos tan notables como Teeteto y Eudoxo, y cuyo influjo alcanzó con toda probabilidad a Euclides —a pesar de la falta de noticias al respecto, es difícil imaginar que su formación intelectual y profesional durante la segunda mitad del s. IV a.n.e. tuviera lugar al margen de la esfera de influencia de la Academia ateniense, tanto más si se repara en la deuda sustancial que los *Elementos* mantienen con esas personalidades matemáticas relacionadas con el círculo platónico (vid. Heath (1926 [2]), edic. c., 1, pág. 2).

Los motivos dialécticos y filosóficos son los que suelen destacar quienes asignan a la axiomatización euclídea una raíz extramatemática. En esta perspectiva se han endosado a los *Elementos* deudas dialécticas y filosóficas tanto de carácter conceptual como de carácter metodológico. La muestra más relevante de esta actitud hermenéutica es la pretensión de entender la empresa axiomática de Euclides como una respuesta, al menos indirecta, a las paradojas suscitadas por los eleáticos: las aporías de Zenón sobre la pluralidad y

el movimiento fueron generalizadas y reelaboradas en la filosofía platónica y sobre todo aristotélica hasta alcanzar el significado de aporías sobre los conceptos de continuidad e infinito, y a partir de ahí pasaron a constituir una amenaza contra la viabilidad de la idea misma de espacio geométrico. En suma, las aporías eleáticas indujeron a pensar que el concepto de espacio resulta inconsistente y, por ende, la empresa de Euclides viene a significar en última instancia el intento —aunque luego no sea plenamente logrado— de una fundación axiomática de la geometría como ciencia del espacio [30]. Esta interpretación luce un brillo tentador, en especial para quienes recuerdan que una axiomatización de la teoría de conjuntos como la emprendida por Zermelo a principios del presente siglo fue una respuesta matemática a las dificultades emanadas de la conceptualización ingenua de Cantor. Por desgracia, nada parece haber de todo esto en los *Elementos*; ya he señalado que faltan unos conceptos generales de la magnitud o del número, y más difícil aún parece encontrar una concepción general del espacio geométrico —a pesar de que hoy, llevados de nuestro conocimiento de la demarcación entre la geometría euclidiana y las no-euclidianas, queramos introducir en los postulados mismos de los *Elementos* el sesgo de una

---

[30] Esta es la línea de interpretación mantenida por A. Szabó: «Anfänge des Euklidischen Axiomensystems», *Archives for History of Exact Sciences*, 1 (1960), pp. 37-106; (1964): «The transformation of Mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms», art. c.; «Greek dialectic and Euclid's axiomatics», en I. Lakatos, ed.: *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Amsterdam, 1967), pp. 1-8; (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics*, o.c., §§ 3.28-3.29, pp. 307-317. El marco general de la interpretación de Szabó ya ha sido resumido y discutido con anterioridad, en el c. I, § 2; me remito allí para las referencias a la literatura crítica que la tesis de Szabó han suscitado. Por otra parte, hay quien como K. Popper ha simplificado aún más, y con menos fundamento, esta interpretación: «¿Cuál era el problema de la geometría de Euclides? O en otras palabras: ¿por qué la geometría fue desarrollada de modo sistemático por Euclides? ... La geometría euclidiana no es un tratado sobre matemática abstracta, axiomática, sino más bien un tratado sobre cosmología, fue propuesta para resolver un problema que había surgido en cosmología, el problema planteado por el descubrimiento de los irracionales», dice en su contribución «The cosmological origins of Euclidean geometry» a la discusión de la ponencia antes citada de Szabó, en I. Lakatos, ed. (1967): *Problems...*, pp. 18-20. La verdad es que sólo una idea muy vaga del contenido de los *Elementos* animaría a alguien a hacerse preguntas del tenor de «¿Cuál era «el problema» de la geometría de Euclides?», y sólo una noticia muy ligera de las preocupaciones de la tradición matemática desde Teeteto hasta Euclides permitiría contestar que se trataba justamente de una cuestión cosmológica.

caracterización estructural o abstrata del espacio que estimamos específicamente «euclidiano» (provisto de los rasgos generales de infinitud, continuidad, isotropía, curvatura nula ...). En realidad, la idea general de espacio geométrico es un producto relativamente moderno y, por lo demás, no cabe apreciar en el pensamiento griego una correlación significativa entre los *Elementos* de Euclides y las ideas de espacio [31]. De otra parte, ya hemos visto que las paradojas eleáticas no llegaron a tener una repercusión crucial o sustancial, fuera directa o indirecta, sobre el desarrollo de la geometría griega; se mantuvieron más bien como motivos de orden filosófico cuya incidencia fue notable en cosmología y en física, y cuyas secuelas se dejaron sentir a lo sumo en la filosofía de la matemática (e.g., en la platónica y en la aristotélica) sin provocar inflexiones decisivas en el curso de la propia investigación matemática —desde luego, no hay constancia de que las provocaran (vid. supra I § 2.3), y menos aún en el sentido de imponer a las pruebas geométricas un nivel determinado de abstracción o un rumbo deductivo precisamente axiomático [32].

---

[31] Para la falta de repercusión de la geometría euclídea en el pensamiento cosmológico griego sobre el espacio, vid. M. Jammer: *Concepts of Space.* New York, 1969 [2]; pp. 23-24. Ni siquiera halla eco apreciable en la especulaciones «paramatemáticas» del neoplatonismo (vid.: S. Sambursky: *The Concept of Place in Late Neoplatonism,* Jerusalem, 1982; I. Mueller: «Mathematics and philosphy in Proclus commentary on book I of Euclid's *Elements*», en J. Pépin, H. D. Saffrey, eds.: *Proclus. Lecteur et intérprète des anciens,* Paris, 1987; pp. 305-318; R. Sorabji (1988): *Matter, Space & Motion,* o.c... Esta indiferencia —que, por lo demás, es mutua en vista del silencio de los grandes geómetras s. III a.n.e. (Euclides, Arquímedes, Apolonio) en materia de filosofía, aunque todos ellos estén convencidos de estudiar un ámbito real de objetos—, constrasta con la asociación tradicional entre geometría y astronomía, o con la aplicación posterior (por parte de Eratóstenes) de la geometría euclídea a la cartografía.

[32] Es significativo, por ejemplo, que el tratamiento filósofico de las cuestiones eleáticas considere aspectos otros que los estrictamente matemáticos (e.g., el problema de cómo cubrir efectivamente una serie infinita de etapas o pasos en el marco de un espacio o de un tiempo finitos). También es significativo el hecho de que la mención del infinito no aparezca en absoluto en las pruebas matemáticas; Euclides sólo emplea esta noción en el sentido de que cualquier línea dada puede prolongarse indefinidamente *[eis ápeiron]* y en el contexto de su teoría de las paralelas —i.e., en los postulados (ii*) y (v*) y en la def. I 23—. Otra fuente pareja de influencia filosófica elática que se alega es la que discurre a través de Demócrito y en nombre de la noción de infinitésimo; puede descartarse por motivos análogos en la medida en que tampoco desempeña función alguna en el desarrollo del método de «exhausción». Hay un examen crítico pormenorizado de ambos alegatos, el que descansa en la noción de

Hay, sin embargo, otro planteamiento más común y razonable de la deuda metodológica de los *Elementos* con una fuente externa. Tradicionalmente, la tesis del «espíritu axiomático» de los *Elementos* ha venido asociada a su comparación y filiación con el programa aristotélico de la ciencia demostrativa. Como ya hemos podido apreciar (vid. supra II, § 5.5), esta asociación ha llevado a veces al desatino de creer que los *Elementos* son la viva encarnación de la teoría aristotélica de la deducción o de la demostración científica. Pero es mucho más frecuente suponer otros lazos más generales y plausibles entre Aristóteles y Euclides. En particular, la correlación entre los *arkhaí* de la ciencia demostrativa aristotélica y los *arkhaí* de los *Elementos* se ha convertido en un lugar común desde que Proclo hiciera hincapié sobre ella en diversos pasajes de sus comentarios al libro I. Un esquema harto sumario de esta correspondencia puede ser el siguiente.

Segundos Analíticos:	*Elementos:*
axiomas comunes	nociones comunes
definiciones («premisas inmediatas»)	definiciones
hipótesis («premisas genéricas»)	postulados [33]

No me voy a detener en un análisis pormenorizado de cada uno de estos emparejamientos, sino en consideraciones de alcance más global que considero más significativas —un problema habitual en

infinito y el que descansa en la de infinitésimo, en el ensayo de W. R. Knorr (1982): «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», l.c., pp. 112-145.

[33] La literatura suscitada por la comparación entre los *Analíticos* y los *Elementos* en este punto es abundante y de valor desigual. Pueden encontrarse observaciones de interés —aparte de la prolija información que brinda Heath (1926²) en su introducción —en los trabajos de H. D. . Lee (1935): «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», art. c.; K. von Fritz (1955): «Die ARXAI in der griechischen mathematik», art. c.; A. Gómez-Lobo: «Aristotle's hypotheses and the Euclidean postulates», *Metaphysics,* 30 (1977), pp. 111-123; J. Hintikka: «Aristotelian axiomatics and geometrical axiomatics», en J. Hintikka, D. Gruender y E. Agazzi, eds. (1980), o.c., I, pp. 133-144 (las denominaciones entrecomilladas de los *arkhaí* aristotélicos se deben a un intento de Hintikka de hacer un análisis de estos ingredientes más fino que el tradicional, vid. su «On the ingredients of an Aristotelian science», *Noûs,* 6 (1972), pp. 55-59); W. R. Knorr: «On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», en J. Hintikka, D. Gruender y E. Agazzi, eds. (1980), o.c., I, pp. 145-186; W. Leszl: «Mathematics, axiomatization, and hypotheses», en E. Berti, ed. (1981), o.c., pp. 271-328.

la literatura sobre este oscuro asunto es que los árboles no dejen ver el bosque, vid. por ejemplo las notas de Heath (1926[2]), edic. c., «Introduction», ix § 3, pp. 117-124.

En principio, parece obligado recurrir al programa aristotélico como marca metodológica de contraste para detectar un presunto espíritu axiomático en los *arkhaí* de los *Elementos*. Sin embargo, no conviene olvidar que el sentido de la teoría aristotélica puede que no sea justamente el de un programa axiomático (vid. supra, II, § 5.3), ni pasar por alto el hecho de que la referencia al programa aristotélico resulta en este punto bastante problemática. Al margen del incierto sentido del programa, nos encontramos con que la caracterización de los ingredientes primordiales de la ciencia demostrativa aristotélica no es todo lo precisa y unívoca que sería de desear (vid. supra c. II, § 4.1). Por otro lado, sabemos que las nociones comunes, los postulados y las definiciones de los *Elementos* tampoco se acomodan a criterios cabales de identificación o de distribución. De una y otra fuente de indeterminación se desprende que la empresa de poner en correspondencia ambos repertorios de ingredientes, los *arkhaí* aristotélicos y los euclídeos, es doblemente aventurada: lo es tanto en lo que concierne a las respectivas reconstrucciones de partida como por lo que toca al resultado de su careo posterior. Así pues, no es extraño que las comparaciones existentes en la literatura a este respecto vengan a resultar tanto menos decisivas y concluyentes cuanto más finas sean.

Intentaré a pesar de todo un balance sumario de las relaciones de similitud y diferencia que median entre la teoría de los *Analíticos* y la práctica de los *Elementos*, en punto a su posible significación «axiomática». Las coincidencias más salientes se pueden cifrar en tres: (i) Hay una distinción neta entre las asunciones primeras y las proposiciones probadas, exigida por la noción técnica de demostración [*apódeixis*] que Aristóteles y Euclides comparten —bien que este término se aplique en los *Elementos* a una fase de la deducción, a la parte demostrativa propiamente dicha de la prueba de una proposición según testimonia Proclo. (ii) Los *arkhaí* o supuestos indemostrables constituyen además principios de organización deductiva de unos cuerpos de conocimiento. (iii) Se da por supuesta en fin la autonomía teórica y disciplinaria de cada uno de esos cuerpos que cuenten con unos principios propios y específicos de conceptualización y de organización —aunque también hayan de compartir ciertas nociones o axiomas comunes que tienen vigencia en cualquier ciencia

demostrativa o dentro de una familia de ciencias como la compuesta por las ciencias matemáticas de la magnitud, el número y la proporción. Las diferencias más notables pueden contraerse parejamente a otras tres: (i') Si el interés aristotélico por los *arkhaí* tiene claras connotaciones filosóficas y epistemológicas —recordemos sin ir más lejos los problemas suscitados por el papel que corresponde a la *epagogé* y al *noûs* en el reconocimiento de los principios propios de una ciencia—, los *arkhaí* de los *Elementos* representan más bien un precipitado de la tradición matemática (a veces impregnada de motivos de orden filosófico, como la distinción entre la unidad y el número o la distinción entre los objetos geométricos, ligados a postulados de construcción, y los objetos aritméticos, sólo susceptibles —al parecer— de definición), o constituyen una reelaboración de este legado matemático; responden a una selección conceptual o teórica determinada por el curso y las necesidades de la investigación en ciertas áreas matemáticas básicas; tal vez este origen comprometido, dispar y complejo, sea el motivo de que los *arkhaí* euclídeos rehúyan un criterio unívoco y uniforme de identificación y clasificación. (ii') Si el programa aristotélico se centra en el análisis de las condiciones lógicas, epistemológicas y metodológicas de un concepto de demostración científica que aspira a un **saber-que** de carácter proposicional (a un saber explicar la necesidad de lo que hay), la tarea de Euclides consiste en la elucidación y la organización deductiva de unos ámbitos concretos de conocimiento matemático con el doble propósito de una sistematización teórica y una exposición disciplinaria que faciliten el acceso a los conceptos y resultados, así como el dominio de los procedimientos, que caracterizan la investigación básica en esos diversos campos. Esta referencia práctica tiene ahora mayor interés. La prueba euclidiana también reviste en ocasiones el carácter de una suerte de ejercitación mental en las condiciones acotadas por los postulados y el alcance de la sistematización euclídea no es sólo doctrinal sino operativo y metódico: depara unos medios efectivos de **saber-cómo**, de hacer o construir objetos geométricos a partir de unos elementos instrumentales básicos (e.g. a partir de la regla y el compás en geometría plana). Señal de esto mismo es la diferente función que pueden cumplir las definiciones y las hipótesis (los postulados) en los *Analíticos* y en los *Elementos:* dentro de la teoría aristotélica no son sino premisas del argumento concluyente, mientras que en la práctica euclídea desempeñan un papel importante en la fase de conformación y preparación metódica

de la prueba (en la *Kataskeué*) y las premisas de la *apódeixis* suelen ser más bien nociones comunes o proposiciones previamente establecidas. (iii') Si la idea aristotélica de demostración y de ciencia demostrativa queda marcada por su estructura lógica silogística, las pruebas «axiomáticas» euclídeas proceden con un rigor informal que, según hemos visto (supra, § 3.2), es irreducible a los sistemas de análisis lógico disponibles en aquel momento.

Estas coincidencias y diferencias fácilmente apreciables —vienen a ser las que cabría esperar cuando se compara un programa filosófico con una práctica demostrativa sistemática—, no deben ocultar empero otra divergencia de fondo, una disparidad de «espíritu» o de intención que distingue sustancialmente el programa aristotélico de «axiomatización» y la práctica euclídea «axiomática». Como ya he indicado (vid. supra c. 2 § 5.4), la motivación capital de la teoría de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* era declarar qué es lo que hay que conocer o asumir en orden a entender una demostración y convalidarla como tal. En cambio, el propósito distintivo de la sistematización deductiva de los *Elementos* es, a mi juicio, la elucidación y la organización de ciertos campos matemáticos básicos y su conversión en cuerpos autónomos y concluyentes de conocimiento. Según esto, cabe reconocer en los *Elementos* cierto «espíritu axiomático». Por lo menos, esa intención de la contribución de Euclides está más próxima y es más afín a uno de los motivos que se juzgan característicos del método axiomático: la puesta en limpio y la reconstrucción sistemática de un conjunto de conocimientos en orden a su constitución como una teoría científica autosuficiente. Desde luego, no todas las cuestiones consideradas en los *Elementos* responden con igual fidelidad a este planteamiento, de modo que no podríamos atribuir ese «espíritu axiomático» al tratado en su conjunto como si representara un sistema compacto y homogéneo de elementos matemáticos. Pero sí cabe reconocer ese sentido a algunas partes del tratado, en particular a su base geométrica. No es casualidad que los seguidores y comentadores alejandrinos de Euclides se dedicaran a consagrar y perfeccionar la geometría de los *Elementos* en esa misma línea, en la de una disciplina científica autónoma y prioritaria compuesta por teorías deductivas informalmente autosuficientes.

Así pues, ¿qué podemos pensar de la relación de Euclides con la metodología aristotélica? Es delicado hablar de deudas directas y específicas: cierto es, por ejemplo, que la noción técnica de *apódeixis* tiene el cuño aristotélico, o que la teoría de la ciencia demostrativa

de Aristóteles prevé la doble dimensión metodológica y disciplinaria que ha de revestir la exposición racional de una materia en un tratado científico; pero no es menos cierto que el rigor demostrativo de las pruebas geométricas ya era asimismo una demanda del propio desarrollo matemático en la primera mitad del s. IV a.n.e., o que esa doble motivación sistemática también inspira la confección de los tratados de *Elementos* dentro de la tradición matemática misma según da a entender Proclo: *In I Eucl. Comm.*, 69.4-27 (sobre los motivos de orden metodológico) y 70.19 ss. (sobre los de orden disciplinario). En suma, el análisis aristotélico supo refinar y orientar las tendencias informales de la tradición matemática, al tiempo que se beneficiaba de otros desarrollos complementarios y entonces concurrentes en el medio intelectual ateniense, hasta llegar a ofrecer una primicia programática del punto de vista axiomático. Euclides, a su vez, bien pudo aprovecharse de todas estas fuentes de inspiración para dar un paso más en esa dirección y lograr de hecho la organización deductiva —o, si se quiere, una «axiomatización» *sui generis*— de ciertos cuerpos teóricos matemáticos.

4. *La institucionalización alejandrina y el Método de Arquímedes.*

Con ser de primer orden la significación teórica y metodológica de los *Elementos*, más llamativa aún resulta su fortuna institucional. Sólo a través de alguna forma de inserción institucional serán visibles y, llegado el caso, ejemplares las virtudes de una contribución sustancial al conocimiento; por otro lado, si la ciencia es conocimiento público, alguna forma de sanción colectiva habrá de acompañar a cualquier desarrollo científico efectivo. De hecho, son varias y diversas las contribuciones individuales que han dejado huella en la historia de las disciplinas científicas y merecen recordarse por un nombre propio: «la ley de W», «el teorema de X», «la fórmula de Y», «el experimento de Z»... Ya son menos frecuentes las contribuciones personales que han marcado una época o una inflexión histórica decisivas en el rumbo de una disciplina e, incluso, en tales casos bien puede ocurrir que la atribución a un autor determinado se preste a equívocos o cobre un sentido meramente genealógico (como sucede en las alusiones habituales a «la revolución "copernicana"», «la mecánica "newtoniana"», «la geometría "euclidiana"»). Pero lo que parece más difícil de hallar es una obra singular capaz

de decidir por sí sola la identidad básica de una disciplina científica: quizás de haber alguna tocada por tan rara gracia institucional, ésta sea precisamente el tratado de Euclides —al menos por lo que se refiere a la geometría clásica—. Recordemos que, en la época helenística, 'Euclides' ya empieza a usarse como epónimo de esta rama de conocimiento y la historia posterior fue acentuando aún más esta identificación al hilo de la escolarización de los *Elementos*.

4.1 La dimensión institucional.

Ya hemos tenido ocasión de reparar en algunos aspectos de la dimensión institucional de los *Elementos*, por ejemplo al considerar su lugar y sentido en la tradición de la prueba matemática (vid. supra § 2.1). Sabemos además que la institucionalización casi inmediata de los *Elementos* se debe de una parte a sus valores intrínsecos (tanto teóricos y sistemáticos como metódicos y disciplinarios) y, de otra parte, a las circunstancias que rodean la cultura científica del helenismo. Sin los primeros no se entendería la singular fortuna e influencia del tratado frente a otras contribuciones sistemáticas nacidas en el mismo medio. Pero la encarnación disciplinaria de la geometría euclídea obedece también a otros factores que dan a las ciencias helenísticas un peculiar aire académico. Me limitaré a destacar uno de ellos: la plena afirmación del texto escrito sobre la cultura oral [34]. El Liceo aristotélico ya había dado unos primeros pasos en esta dirección al implantar la lectura de textos y la lección basada en notas o referencias relativamente organizadas y precisas (aparte de que la escritura sea de suyo imprescindible para hacer análisis lógicos o fijar patrones metódicos como los aristotélicos). Pero la cultura

[34] Para el período helenístico en general, puede verse R. B. Bandinelli, dir. (1977): *Historia y civilización de los griegos.* VIII (Barcelona, 1980) y IX (Barcelona, 1983), sobre la civilización helenística; X (Barcelona, 1983), sobre la cultura helenística (filosofía, ciencia, literatura). El relieve de las instituciones científicas de Alejandría queda de manifiesto en P. M. Fraser: *Ptolemaic Alexandria,* Oxford, 1972; I, pp. 305-335, y II, pp. 462-494, en particular. Para otros aspectos de interés, vid. Giannantoni: «Su alcuni problemi circa i rapporti tra scienza e filosofia nell'età elenistica», en G. Giannatoni y M. Vegetti, eds. (1984), o.c., pp. 41-71; M. Vegetti: «La scienza ellenistica», ibd., pp. 431-470. Un panorama general de las múltiples implicaciones del desarrollo de la escritura se puede obtener de las contribuciones recogidas en M. Detienne, dir.: *Les savoirs de l'écriture en Grèce ancienne.* Presses universitaires de Lille III, 1988.

helenística toma una orientación más decidida hacia el tratado científico —además de la cobertura teórica que los *Analíticos* aristotélicos pudieran deparar en este sentido, los *Elementos* marcan un giro decisivo hacia la secuencia demostrativa escrita [35]—, y se beneficia de unas circunstancias especialmente favorables. Unas son de orden cultural, e.g. la implantación de una *koiné* lingüística, de un lenguaje común cosmopolita. Otras son de distinto orden, como la concentración en manos griegas de la producción de papiros y pergaminos, y la creciente disponibilidad de esclavos cultos: ambas aseguran una base mínima de producción material de libros y sobre esta base cabe ir formando bibliotecas relativamente amplias y accesibles, al socaire de nuevas formas de patronazgo regio (e.g., la representada por los primeros Tolomeos). Añadamos la aparición de comunidades de doctos, como los investigadores y becarios —digamos— del Museo de Alejandría, alguna de ellas, en particular la comunidad matemática, capaz de albergar una especie de «colegio invisible» en su seno —tal es el medio en el que circulan las comunicaciones de Arquímedes a sus colegas alejandrinos (Conón, Dositeo, Eratóstenes). Estas comunidades no sólo configuran la existencia de un nuevo público que demanda información especializada con capacidad para discernir y sancionar la calidad de una aportación concreta, sino que refuerzan la orientación disciplinaria de algunos dominios del conocimiento (geometría, filología, medicina, astronomía, retórica), la confección de tratados sistemáticos y, ulteriormente, la glosa y la edición académicas de los textos con reputación de «clásicos».

No es casual entonces que un aspecto institucional característico de los *Elementos* sea la calidad de *archivo* de la matemática elemental que confieren al tratado los usos, citas y alusiones posteriores: en él han cristalizado los conocimientos y las técnicas básicas en materia de geometría. Constituye un depósito de teoremas y de procedimientos de libre disposición, un repertorio de resultados que cabe aducir por una simple mención o por su uso tácito, sin otros requisitos de prueba ni mayor justificación que el hecho de ser proposiciones de los *Elementos:* allí constan y por ende son cosa sabida. Por otro lado, facilita un tipo peculiar de desarrollo de la disciplina geométrica: su crecimiento normal [*epídosis*] por sucesivas adiciones que irán completando lo que falte, según había previsto Aristóteles

[35] Vid. G. Cambiano: «La démonstration géométrique», en M. Detienne, dir. (1988), o.c., pp. 251-272.

(*EN* I 7, 1089a21-25). Esta forma de progreso científico puede incluir la expansión de la base inicial mediante la consideración sistemática de nuevos objetos de su universo de discurso —e.g. las secciones cónicas estudiadas por Apolonio—; puede consistir en la explicitación de verdades latentes y de suposiciones tácitas en los mismos procedimientos básicos con el fin de mejorar sus aplicaciones o precisar su campo de operación —fue quizás la tarea más común dentro de la comunidad alejandrina y tal vez dio lugar a una jerarquía de problemas (planos, sólidos, lineales) con la directriz de parsimonia correspondiente, vid. supra § 2.3—; puede suscitar, en fin, glosas y comentarios del tratado que lo convierten en la fuente y en la autoridad primera de la disciplina.

Los *Elementos* constituyen además un modelo real de organización deductiva y de exposición metódica de la ciencia: la forma óptima de una ciencia cierta es la que reviste un cuerpo de conocimientos compuesto por sus principios (axiomas comunes, asunciones específicas, definiciones) y teoremas. En este sentido, la repercusión cultural del tratado en el mundo helenístico traspasa los límites de una disciplina como la geometría o, incluso, de una familia de disciplinas como las matemáticas. Podemos hablar de esta incidencia en términos de «estilo euclídeo» [36]. Este *estilo*, en este contexto, no representa una filosofía aplicada, ni un método o una manera de proceder uniformemente seguidos en la construcción del saber, aunque su referencia contenga en solución ciertos supuestos epistemológicos y metodológicos característicos. La noción de *estilo* apunta más bien una idea regulativa o directriz de la organización sistemática de la ciencia y una modalidad del discurso científico: ambas conforman la representación de un cuerpo de conocimientos como una disciplina científica a los ojos de quienes la cultivan y del público en general. Como ya he indicado, esta significación de los *Elementos* trasciende la constitución disciplinaria de la propia geometría: su disposición deductiva se ofrece como arquetipo general de ciencia rigurosa e incontrovertible. Es, por ejemplo, el modelo al que remite Tolomeo cuando presenta los títulos científicos de su astronomía matemática, pues —asegura— sólo el conocimiento de orden matemático, tratado con el debido rigor, da una ciencia sólida

[36] Vid. G. G. Granger (1988 [2]): *Essai d'une philophie du style,* o.c. Sobre el estilo euclídeo en particular, pp. 24 ss. También hay referencias a él en M. Vegetti (1984): «La scienza ellenistica», l.c., pp. 433-440, 450-457 especialm.

y cierta a quien la cultiva dado que las demostraciones aritméticas y geométricas proceden de modo incontrovertible (*Synt.* I 1). Galeno, sin pertenecer a la familia matemática, aún es más explícito al preconizar la fundamentación de los conocimientos médicos y biológicos: aparte de los estudios de anatomía, hay que recurrir al patrón de la prueba geométrica con el fin de liberar al arte de la medicina de sus habituales disquisiciones filosóficas y querellas dialécticas, y suministrarle la cohesión de una ciencia construida conforme al ideal «euclídeo» (*De lib.* 11; *De meth. med.*, I 4; *De plac.* VIII 1). En suma, el estilo euclídeo proyecta sobre otros campos de conocimiento con pretensiones científicas y disciplinarias el poder de normalización que los *Elementos* habían mostrado en geometría. Ni que decir tiene que la proyección suele ser programática, especulativa; siempre corre el riesgo de resultar prematura y a veces puede volverse contraproducente [37].

El estilo euclídeo es una señal más de la compleja situación de continuidad y discontinuidad en que se desarrolla la cultura helenística. Contiene en disolución algunos supuestos tradicionales —e.g. de raíz platónica, de origen aristotélico [38]—. Pero en su seno obran también diversos signos de los nuevos tiempos. Con él se extiende, por ejemplo, la sensación de una neutralidad teórica y de una auto-

---

[37] G. E. R. Lloyd, al ocuparse de la idea griega de demostración en su *Desmystifying Mentalities* (Cambridge University Press, próx. aparición), denuncia las secuelas nocivas de esta proyección en medicina y fisiología, dentro de la misma matemática, en el planteamiento de las relaciones entre las ciencias exactas y la complejidad empírica de la realidad física. No estoy seguro de que todas estas secuelas se deban a la dimensión metódica y «axiomática» de la prueba *more geometrico*. En el caso de la matemática, al menos, el estilo euclídeo también entrañaba otros componentes amenazadores para su desarrollo como la tradición del método de aplicación de áreas, la clasificación estanca de tipos de problemas (planos, sólidos, lineales), la consideración concreta y relativamente autónoma de los objetos geométricos...; pero unos ingredientes como éstos no evidencian precisamente un exceso de rigor sino más bien defectos de axiomatización, en particular la falta de una perspectiva estructural adecuada.

[38] Cuenta, por ejemplo, el poso platónico de la existencia de un orden objetivo del mundo al que ha de amoldarse nuestra inteligencia (*Timeo* 47b-c); pero abundan sobre todo los motivos aristotélicos y peripatéticos: la autonomía de los géneros naturales de objetos y de los *arkhai* correspondientes, la prioridad de una ciencia básica (e.g.: geometría) sobre sus derivadas (óptica, mecánica), la importancia de la erudición *[polimathía]* y la especialización; por lo demás, se atribuye a un discípulo de Teofrasto, Demetrio de Falero, la inspiración de la política de instituciones científicas adoptada por Tolomeo I en Alejandría, donde Demetrio fue bibliotecario antes de caer en desgracia.

suficiencia metódica de las disciplinas científicas bien asentadas; esta sensación inspira una especie de demarcación entre unas cuestiones internas, disciplinarias, y otras cuestiones externas, indisciplinadas (en el medio académico alejandrino se deja notar cuando menos una tendencia al silencio o la inhibición ante los problemas filosóficos y los debates dialécticos de las escuelas de Atenas, y en general ante las crisis políticas e ideológicas: el mundo académico tiene asuntos aparte del mundo revuelto de la ciudad). Otro signo de los nuevos tiempos es la erección de la comunidad de especialistas no sólo en sujeto sino en tribunal del conocimiento dentro de cada una de las disciplinas establecidas. No hay un juez universal y supremo de la racionalidad teórica y práctica, como presumía serlo el filósofo de Platón, acreditado por su amor a la verdad, sino una distribución de competencias entre los nuevos sabios (el cínico, el epicúreo, el estoico) y los nuevos especialistas científicos a quienes corresponde el conocimiento técnico y seguro de determinados sectores de la realidad —por no traer a colación a los tradicionales representantes de la sabiduría popular (magos, curanderos) o a los nuevos purificadores esotéricos. Es la ciencia, alega Tolomeo en los prolegómenos de su escrito *Sobre el criterio*, la que puede pronunciarse como lo haría el veredicto más cierto y acorde con los hechos. Serán, pues, las comunidades de entendidos los agentes ideológicos que dictaminen la irracionalidad de ciertas proposiciones en sus jurisdicciones respectivas: astrónomos como Tolomeo o Derkylidas son quienes condenan al ostracismo el heliocentrismo de Aristarco; son médicos como Galeno quienes repudian la hipótesis peripatética y neoplatónica de la inteligencia animal; en suma, son «autoridades académicas» las que descartan con su silencio o su desaprobación expresa los atentados al sentido común antropocéntrico por no ser conformes a la razón.

La amplia repercusión cultural del estilo euclídeo, a pesar de su cariz programático, no descansa en un programa especulativo sino en la realización ejemplar de los *Elementos*; según advierte un antiguo adagio escolar: «Exempla trahunt, sermones avertunt». Supone así una forma de institucionalización más concreta y precisa que, por añadidura, tiene mayor interés en el presente contexto. Se trata del papel de *paradigma* que toca desempeñar a los *Elementos* en la conformación de la comunidad matemática alejandrina. Los *Elementos* de Euclides ofician en este sentido no sólo como un tratado sistemático ejemplar y como una base común del cultivo específico de

la geometría, sino además como patrón y criterio del rigor deductivo que corresponde a las pruebas geométricas y, por extensión, a la demostración científica en general. Cierto es que los geómetras ya habían sido espejo de la argumentación concluyente para Platón y Aristóteles. Pero es señal de la nueva situación el aire no sólo normativo sino conminatorio que tienen las referencias de un Tolomeo o de un Galeno a la demostración geométrica, a la prueba cortada por el patrón de los *Elementos*. Otro claro síntoma del estatuto paradigmático de los *Elementos* es la pronta aparición de una especie de ortodoxia de la prueba matemática en la comunidad alejandrina. De este acceso dogmático —metodológico antes que doctinal— sólo tenemos noticias indirectas: dan fe de las reticencias con que varios geométras asisten desde Alejandría a las innovaciones y libertades creadoras de los mejores matemáticos del gran siglo III a.n.e. (Conón, Arquímedes, Apolonio). Arquímedes, por ejemplo, adopta ciertas cautelas cuando tras la muerte de Conón pasa a comunicar los resultados de su investigación a Dositeo, discípulo de Conón pero a la vez digno representante de la escuela alejandrina; igualmente se cuida de atribuir valor demostrativo a su método mecánico de abordar y avanzar la solución plausibles de algunos problemas geométricos (vid. infra, § 4.2). Apolonio, en el prefacio del libro IV de las *Cónicas*, presta un testimonio análogo al mencionar la crítica de Nicoteles a unos resultados obtenidos por Conón: Nicoteles los descarta por una simple cuestión de procedimiento, sin hacer el menor intento de mejorar las pruebas o de sustituirlas por otras de propia cosecha (vid. Heath (1921), o.c., t. II, pp. 130-131). Pappo, varios siglos después, sigue denunciando el celo conservador de los geómetras que vuelven una y otra vez sobre principios y reglas, al tiempo que vindica su interés personal en el ensayo de nuevos procedimientos y el logro de nuevos resultados (*Collect.* VII 41-42). Estas referencias ilustran el hecho de que la demostración euclídea constituye el estándar de aceptabilidad y de rigor en el seno de la comunidad matemática, y el hecho de que esta comunidad ejerce un papel mediador en la incorporación de nuevos resultados probados al corpus matemático establecido. Sus funciones de control son expresamente reconocidas por Apolonio cuando atribuye a estos colegas —a los que se dirige a través de Eudemo de Pérgamo— la capacidad de juzgar [*krínein*] sobre la corrección y la validez de sus resultados (vid. el prefacio general al libro I de las *Cónicas*, en Heath (1921), o.c., II, pp. 128-130). Análogamente, Arquímedes espera de

sus colegas alejandrinos la aptitud para pronunciarse [*episképsasthai*] sobre la calidad de sus demostraciones (*Sobre la esfera y el cilindro,* I). Aunque los matemáticos creadores no dejan de lamentar que esa comunidad alejandrina obedezca a pruritos metódicos, en vez de impulsar el desarrollo sustancial del conocimiento matemático.

Todo lo señalado hasta aquí no significa, desde luego, la implantación de una escolástica sectaria y monolítica. Ya hemos tenido ocasión de considerar otros síntomas de signo opuesto, que vienen a complicar el síndrome institucional de los *Elementos* en la geometría helenística. El tratado no es sólo una pauta a seguir y un corpus a custodiar, sino una fuente viva de desarrollo de la tradición matemática, capaz de promover a veces discusiones de principios —e.g. en torno al postulado de las paralelas— y otras pruebas alternativas (vid. supra, § 2.2), e incapaz de anular el recurso a otros procedimientos o el desarrollo de otros puntos de vista más o menos marginales pero asimismo existentes en la rica tradición matemática griega —e.g. el cálculo logístico—. Por otra parte, la presión del modelo euclídeo hacia la sistematización sintética, «axiomática», no llega a desterrar, en la misma matemática, todos los antiguos usos analíticos-reductivos del tratamiento de problemas. Arquímedes es una vez más una buena referencia. Fue seguramente el talento mejor dotado para satisfacer las demandas del rigor informal en la elaboración de pruebas. Hizo algún ensayo de «axiomatización» y siempre se mostró dispuesto a reconocer el canon alejandrino de la demostración geométrica. Pero nunca manifestó excesivas preocupaciones axiomáticas ni mucho interés por el desarrollo de la estructura metodológica de las matemáticas conocidas [39]. Su objetivo primordial es el

[39] Un síntoma elocuente puede ser la despreocupación de Arquímedes por una terminología «axiomática» no ya técnica, sino siquiera consistente. Para referirse a postulados o a definiciones puede emplear términos tan variados como *«hypóthesis»*, *«lambanómena»*, *«lémmata»* y derivados de *«hypokeímai»* o de *«aitéo»;* tampoco hace un uso coherente de las claúsulas *«etéstho* (asúmase)», *«hypokeístho* (supóngase)», que entre los matemáticos alejandrinos solían introducir respectivamente los postulados y las definiciones (u otras proposiciones primordiales). Más significativas son las limitaciones que, desde un punto de vista axiomático, tienen ensayos como *Sobre el equilibrio de los planos* I. Vid. al respecto P. Suppes (1980): «Limitations of the axiomatic method in ancient Greek mathematical science», l.c., pp. 199-209 en especial; también hay referencias en W. R. Knorr: «On the early history of axiomatics...», *Ibd.*, p. 172. O. Schmidt (1975): «A system of axioms for the Archimedean theory of equilibrium and centre of gravity», art. c., ha intentado una reconstrucción axiomática del ensayo arquimediano.

planteamiento y la solución de ciertos problemas en aras de un desarrollo parcial pero sustantivo de la tradición matemática. Por eso buena parte de su producción reviste la forma de estudios y comunicaciones en torno a un puñado de resultados. Allí Arquímedes selecciona unos pocos problemas, declara los supuestos capitales de su solución y procede luego a la prueba deductiva de sus conclusiones como si hallara natural la convivencia entre el proceder sintético impuesto por el estilo euclídeo en la demostración de teoremas y otros procedimientos de resolución de problemas (reminiscencias de la vía analítica) legados por la tradición.

Es obvio por lo demás que ni siquiera la comunidad alejandrina —menos aún algún grupo satélite: Pérgamo, Efeso, etc.— estaba en condiciones de imponer una disciplinarización completa de las ciencias matemáticas, como tampoco se podía aspirar entonces a una profesionalización del científico. En realidad, ni los propios especialistas (matemáticos, médicos, retóricos...) parecían abrigar pretensiones en tal sentido; más bien, al contrario, solían recibir con agrado el título de «versados en materia de filosofía» con el que, por ejemplo, Arquímedes distingue a Eratóstenes —y no creo que su significación se redujera a la de nuestro «PhD»—. En todo caso, la existencia de unas disciplinas físicas y matemáticas propiamente dichas, y la figura del científico profesional son fenómenos con los que nos empezamos a familiarizar casi anteayer, en el transcurso del s. XIX. Pero todo esto, como excusaría Rudyard Kipling, es otra historia. (Historia que no sólo envuelve, desde luego, consideraciones de orden socio-cultural e institucional.)

4.2 Arquímedes: el Método y los métodos de investigación y de prueba

Es Arquímedes, sin duda, quien mejor puede ilustrar la institucionalización de la demostración euclídea en el curso del s. II a.n.e. Podemos considerarlo el más capaz de los matemáticos griegos, uno de los más originales y menos sensibles al influjo de la escuela alejandrina. Naturalmente, comparte el interés tradicional por la geometría métrica y no faltan en su obra huellas concretas de Euclides (e.g. en la prueba de la prop. 1 de *Sobre la medición del círculo*, o en las de 18-24 de *Sobre la cuadratura de la parábola*). Pero no tiene el menor reparo en hacerse eco de algunas variantes pre-euclídeas; más aún, sus referencias expresas a Eudoxo contrastan con su re-

nuencia a citar los *Elementos*. Su propio talento creador y su preocupación por el desarrollo sustancial de las matemáticas —entendidas con la generosidad con que las griegas acogían tanto investigaciones básicas (aritméticas, geométricas) como aplicadas (mecánicas, ópticas, astronómicas), vid. Proclo: *In I Euc. Comm.* 38.1 ss.—, le mueven además no solo a plantear nuevos temas y problemas e introducir nuevos conceptos y mayores precisiones con vistas a mejorar el rigor informal de las pruebas, sino incluso a adoptar un procedimiento de investigación que contraviene ciertas normas de la ortodoxia alejandrina, un método que discurre en geometría a través de nociones e hipótesis mecánicas. Con todo y con esto, a la hora de probar efectivamente sus resultados, Arquímedes se atiene al canon alejandrino de la demostración euclídea. El es el primer interesado en delimitar el alcance meramente plausible y el rendimiento puramente heurístico del método mecánico frente a la cogencia concluyente de la demostración geométrica propiamente dicha. En resumen: Arquímedes, por su lúcida observancia del patrón alejandrino de prueba y por su conocimiento de las posibilidades y los límites de un tratamiento alternativo de las cuestiones geométricas, es el mejor testigo de la significación paradigmática que cobra la demostración que Euclides había practicado en los *Elementos*.

Su testimonio se encuentra en la carta a Eratóstenes «sobre un método relativo a las proposiciones mecánicas», escrito que comúnmente recibe la denominación abreviada de *Método*. «Reconociendo tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía —dice Arquímedes en el preámbulo—, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación [*theoreîn*] de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración [*eis tèn apódeixin*] de los teoremas mismos. Pues algunos que primero se me hicieron patentes por la mecánica [*phanénton mekhanikôs*], recibieron luego demostración por geometría [*geometrikôs apedeíkhthe*], habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración [*khorìs apodeíxeos*]; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento [*gnôsin tina*] de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto <...> Y he querido publicar el método una vez perfilado para que no den en

pensar algunos que hablaba por hablar al haberme referido a él anteriormente y, al mismo tiempo, porque estoy convencido de que puede representar una contribución no poco provechosa para la investigación matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores llegarán a encontrar por el método expuesto otros teoremas que a mí todavía no se me han ocurrido» (*El método*, edic. c., pp. 35-36).

Esta declaración del preámbulo no deja lugar a dudas sobre la distancia que separa al método mecánico de investigación *['theorêm mekhanikós']* de la demostración geométrica *['geometrikós apodeiknýnai']*. Distancia luego corroborada en cada uno de los teoremas considerados; por ejemplo, tras presentar el primer caso —acerca del área de un segmento parabólico— resuelto por la vía mecánica de argumentación, Arquímedes hace notar: «Lo que hemos aducido no demuestra ciertamente ese resultado; sin embargo, da a la conclusión visos de verosimilitud. Así pues, viendo que no es un resultado demostrado pero sospechando que la conclusión es verdadera, expondremos en su debido lugar la demostración geométrica que hemos hallado.» (*El método*, 2, edic. c., pág. 43).

Esta comunicación de Arquímedes, con la hechura de una memoria científica, ocupa un lugar especial en el conjunto de su obra por distintos motivos y diversas circunstancias —más alguna peripecia—, que pasaré por alto para fijarme únicamente en los aspectos más notables en el presente contexto [40].

La significación del *Método* como índice de la institucionalización de la demostración geométrica estriba justamente en la contrafigura que representa la argumentación mecánica. El examen de este tipo de argumentación permitirá una definición más precisa, por contraste, del perfil del patrón alejandrino: podremos conocer no sólo lo que se hace cuando se da la demostración efectiva de un teorema geométrico —basta recordar la práctica de los *Elementos*—, sino qué es lo que no cabe hacer en esta clase de pruebas.

---

[40] Vid. aparte del clásico, E. J. Dijksterhuis (1956, 1987): *Archimedes*, c. X, pp. 313-336, W. R. Knorr (1978): «Archimedes and the *Elements:* proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus», art. c.; I. Schnedier: *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenchaftler und Mathematiker*, Darmstadt 1979; A. García de la Sienra (1983): «El método de Arquímedes», art. c.; G. Cambiano (1984): «Archimede e la créscita della goemetría», en G. Giannantoni y M. Vegetti, eds., o.c,; T. Sato (1986, 1987): «A reconstruction of *The Method* prop. 17 and the developpement of Arquimedes' thought...», art. c.

A primera vista, el Método se asemeja a cualquier otro repertorio de problemas tratados por la vía canónica geométrica. Parte de unas asunciones previas que envuelven esencialmente la noción de centro de gravedad: determinan tal concepto para las figuras pertinentes (la recta, el triángulo, el paralelogramo, el círculo, el cilindro, el prisma, el cono) mediante definiciones, algunas tomadas de otro estudio arquimédico, *Sobre el equilibrio de los planos* I. Luego la consideración de las proposiciones planteadas discurre deductivamente y no deja de apoyarse en resultados establecidos, sean lemas o teoremas del propio Arquímedes, sean teoremas pertenecientes al acervo matemático de la época. Más aún: la argumentación reviste en cada caso una forma semejante a la estructura externa que Proclo hace notar en la demostración euclídea (vid. supra. § 3.1). Esa argumentación suele comprender: la proposición objeto de consideración; la exposición o instanciación en un caso determinado, a veces marcada por la cláusula 'digo que *[légo hoti]* ...'; una fase de preparación o disposición en la que concurren construcciones geométricas, introducidas por un 'sea *[ésto]*', 'trácese *[anagegráphtho]*' o un término equivalente, y construcciones estáticas, normalmente introducidas por la indicación 'imagínese o concíbase *[noeístho]* la línea tal o cual como una palanca'; una fase de deducción sobre la base de resultados establecidos y de ciertas hipótesis mecánicas; y, en fin, la conclusión que reitera la proposición inicial y a veces presenta incluso ciertas marcas del *sympérasma* de la demostración geométrica [41]. Desde el punto de vista lógico, el curso de la deducción también es análogo al de la deducción directa practicada informalmente por Euclides.

Los puntos de contraste de una argumentación de este tipo con la prueba geométrica parecen reducirse a dos: a la mediación de nociones y construcciones estáticas, y al empleo de hipótesis mecánicas en la obtención deductiva del resultado. Para calibrar su importancia echemos un vistazo al contenido temático y a la estructura interna de los casos expuestos en el *Método*.

Por lo que concierne a los problemas considerados, cabe distribuirlos en tres temas de investigación: o bien a/ se trata de mostrar

[41] E.g.: la proposición 3 finaliza con la cláusula «*oi*», abreviatura de «*hóper édei deîxai*», remate típico de una demostración euclídea y, por cierto, impropio de este contexto de argumentación; la proposición 4 introduce la conclusión mediante la cláusula «*pháneron estì* (es evidente)», también habitual en las conclusiones demostrativas (vid. *El método*, edic. c., pp. 53 y 56).

que el área o el volumen de una figura curvilínea se halla en una proporción determinada con el área o el volumen de una figura rectilínea (e.g.: «el área de un segmento de parábola ΑΒΓ es igual a 4/3 el área del triángulo ΑΒΓ inscrito en el segmento», prop. 1); o bien **b/** se trata de establecer la proporción que guardan entre sí los volúmenes de dos figuras curvilíneas (e.g.: «toda esfera es el cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera», prop. 2); o bien **c/** se trata de determinar el centro de gravedad de un sólido curvilíneo (e.g.: «el centro de gravedad de todo hemisferio se halla sobre la recta que es su eje en un punto que la divide de manera que la parte situada hacia la superficie del hemisferio tenga con la parte restante la misma razón que cinco tiene con tres», prop. 6). Los dos primeros tipos de problemas se enmarcan en la tradición de la geometría métrica, empeñada —como ya sabemos— en la cuadratura o en la cubatura de las figuras y los cuerpos: para resolver la cuestión de determinar el área o el volumen de un objeto geométrico basta demostrar su igualdad con el área o el volumen de un cuadrado o un cubo. Una aportación decisiva de Arquímedes al desarrollo de la tradición es su escrito *Sobre la medición del círculo*, donde demuestra que el área del círculo equivale a un triángulo rectángulo en el que uno de los lados adyacentes es igual al radio y el otro es igual a la circunferencia del círculo (*Sobre la medición del círculo,* 1), al tiempo que hace una estimación aproximada de la razón π de la circunferencia al diámetro (*Ibd.*, 3). La medida del círculo cumple así en la geometría de las figuras curvilíneas un papel similar al del triángulo en la geometría euclídea de las figuras planas; el cálculo posterior del volumen de la esfera abre la posibilidad de un tratamiento métrico de los volúmenes parecido al que Euclides había desarrollado en el caso de las áreas por referencia al cuadrado; así mismo, conocida la relación entre la esfera y el cilindro que la circunscribe, cabe construir un paralelepípedo sólido cuyo volumen sea aproximadamente igual al de este cilindro —i.e. aproximadamente igual a 3/2 el volumen de la esfera y por este medio se obtiene una aproximación razonable entre el volumen de la esfera y el volumen de una figura rectilínea—. A. Frajese, en su edición de las obras de Arquímedes (*Opere.* Torino, 1974; «Introduzione», p. 22), afirma que estos resultados de Arquímedes parten de una intuición heurística primordial de *simplicidad*, una hipótesis de trabajo que consiste en la reducibilidad de la complejidad geométrica a una relación aritmética simple (e.g. el

volumen del cilindro y del cono de igual base y altura guardan entre sí la razón 3:1). Esta intuición es la que luego, a veces, resultará verificada por el método mecánico y habrá de ser, en todo caso, objeto de demostración rigurosa por el método de exhausción. Si tal interpretación fuera atinada, esa intuición o hipótesis de trabajo primordial de Arquímedes cuadraría tan bien con la tradición matemática griega —con ciertas contribuciones de Eudoxo y Euclides en particular—, que podríamos ver en ella no sólo una buena ocurrencia sino un fruto del álveo común de conocimiento matemático en el que se inspira el trabajo geométrico de Arquímedes.

El tercer tipo de problemas nace en cambio de una línea de investigación original y típicamente arquimediana. Se funda en el tratado sistemático *Sobre el equilibrio de los planos* I y consiste en una aplicación de la geometría a la mecánica, en concreto a cuestiones de estática como las condiciones de equilibrio y el concepto de centro de gravedad. La originalidad de Arquímedes estriba no sólo en abrir este horizonte científico sino en aparejar los medios necesarios para la investigación dentro de este campo (e.g.: el tratamiento del peso como una magnitud extensa, la medición conjunta de pares de magnitudes como el peso sobre un brazo de la palanca y la distancia respecto del fulcro). Un aspecto interesante del tratado *Sobre el equilibrio* ... I es la intención «axiomática» que parece presidir su confección. Descansa, por ejemplo, en postulados del tenor de (iv): «Cuando unas figuras planas iguales y semejantes coinciden al superponerse, sus centros de gravedad coinciden parejamente»; (v): «En las figuras no iguales pero semejantes, los centros de gravedad se hallan similarmente situados. Por puntos similarmente situados en el caso de figuras semejantes entiendo puntos tales que si se trazan desde ellos rectas hasta los ángulos iguales, hacen ángulos iguales con los lados correspondientes»; (vii): «En cualquier figura cuyo perímetro sea cóncavo en una y la misma dirección, el centro de gravedad ha de encontrarse dentro de la figura». Podemos considerar que estos postulados quieren dar una caracterización adecuada del concepto de centro de gravedad, concepto que ulteriormente será definido para determinadas figuras geométricas. Pero ésta sería una pretensión frustrada. De hecho, los postulados de Arquímedes no proporcionan una caracterización axiomática satisfactoria de su concepto nuclear; la «axiomatización» ni llega a ser completa ni alcanza un grado de abstracción suficiente [42].

[42] Vid. P. Suppes (1980): «Limitations of the axiomatic method...», art. c. M.

Sea como fuere, el método mecánico de Arquímedes se nutre de ambas líneas de investigación, la geométrica y la estática, según evidencia la constitución interna de este tipo de argumentación. En las fases de preparación y deducción que antes habíamos visto al mirar su estructura externa ya habíamos apreciado la existencia de dos clases de ingredientes y supuestos: unos de carácter puramente geométrico, otros de carácter mecánico. Los primeros, como ya he sugerido, consisten en la construcción de los objetos pertinentes y en la correlación métrica de las figuras o secciones de cuerpos cuya área, volumen o centro de gravedad es el motivo de la investigación, con otras figuras o secciones de cuerpos conocidos. En ambos casos, Arquímedes aprovecha los teoremas disponibles en la comunidad matemática así como otros resultados de propia cosecha anteriormente probados.

Los ingredientes mecánicos incluyen nociones estáticas en la perspectiva abierta por la consideración de una línea como una palanca y dos tipos de hipótesis que permiten sacar provecho de esta perspectiva. Las hipótesis del primer tipo, digamos $\mathbf{H_1}$, se refieren a las condiciones de equilibrio entre magnitudes cuyos centros de gravedad se sitúan en determinados puntos de los brazos de la palanca. Entre estos supuestos figuran proposiciones tomadas de *Sobre el equilibrio*... I, asunciones tácitas semejantes a las que ya obraban en este tratado y ciertas conjeturas cuya aplicación general no cabía establecer con los recursos de que disponía Arquímedes. Una de estas hipótesis supone que si un número cualquiera de magnitudes A_i, colocadas con sus centros de gravedad en los puntos G_i de una palanca, equilibran respecto del fulcro una magnitud B colocada con su centro de gravedad en el extremo opuesto del otro brazo de la palanca, entonces la magnitud resultante de la suma de las magnitudes A_i, colocada en el centro de gravedad del sistema original A_i, equilibra B mantenida donde estaba. Si se explicitan algunas suposiciones tácitas, pero posiblemente al alcance de Arquímedes, se pueden probar algunos casos finitos de esta hipótesis —en particular, el caso elemental en que A_i sólo se compone de dos magnitudes A_1 y

---

Clagett se hace eco de la conjetura de que tal vez hubiera una obra hoy perdida, de la que *Sobre el equilibrio de los planos* fuera un extracto, en la que Arquímedes habría explicitado y establecido algunos supuestos y resultados complementarios, vid. su contribución «Archimedes» en Ch. G. Gillispie, dir. (1981 [2]): *Dictionary of Scientific Biography*, o.c., t. 1-2, pag. 215.

A_2—; ahora bien, la prueba canónica de la aplicabilidad de la hipótesis a un ámbito general indefinido (o infinito) como el que parece suponer Arquímedes —ya en la prop. 1 del *Método*— requiere un aparato funcional de cálculo que los matemáticos griegos ni siquiera estaban probablemente en condiciones de imaginar [43].

Las hipótesis del segundo tipo, H_2, se refieren a la constitución «infinitesimal» de las figuras geométricas. Se pueden contraer a las dos suposiciones: **a/** Toda figura puede considerarse compuesta por elementos «infinitesimales»: las figuras planas y las superficies de los cuerpos se componen o llenan de líneas rectas (e.g. el triángulo y el segmento de parábola se componen de cuerdas paralelas), y el cilindro, la esfera y el cono se componen a su vez de secciones circulares paralelas (i.e., de áreas planas). **b/** La suma infinita de las magnitudes elementales que componen o llenan la figura es igual a la magnitud de la figura compuesta. La composición «infinitesimal» de las figuras geométricas es una conjetura descartada por la tradición matemática griega. Según el testimonio expreso de Aristóteles y de Euclides (vid. supra, § 2.3), el punto es lo que no puede dividirse en partes y por ende carece de extensión, en consecuencia cualquier suma de puntos, aunque sea infinita, resulta igual a cero y nunca podría producir la longitud de una línea; como la anchura de la línea y la profundidad del plano son parejamente nulas, tampoco cabe pensar que un plano esté constituido por una suma de líneas o un volumen por una adición de planos. Hoy sabemos algo más a este respecto. Sabemos que la suposición **a/** es errónea —habida cuenta de que dos intervalos cualesquiera de números reales resultan equipolentes, la idea de esa suerte de constitución infinitesimal induce a error—; mientras que la conjetura **b/** es acertada y puede justificarse con los medios lógicos y matemáticos que ha introducido el llamado «análisis no estándar» [44]. Por consiguiente, la hipótesis **a/** no implica el éxito alcanzado a través de **b/**. Quizás los resultados obtenidos por Arquímedes respondan al malentendido que han creído observar algunos editores modernos —como Heath (1912)—: aunque Arquímedes hable de líneas rectas y de áreas planas, en realidad está operando con

---

[43] Vid. A. García de la Sienra (1983), art. c., pp. 69-73 en especial.

[44] Hay una sucinta exposición de las ideas básicas del análisis no estándar y de su sentido en la accidentada historia moderna del cálculo infinitesimal, en A. Robinson: «The metaphysics of the calculus», vid. I. Lakatos, ed. (1967): *Problems in the Philosophy of Mathematics*, o.c., pp. 28-40.

bandas indefinidamente estrechas en el caso de la composición de planos y con láminas indefinidamente delgadas en el caso de la composición de sólidos.

Dos observaciones finales sobre estas hipótesis H_1 y H_2. En primer lugar, las de tipo H_1 propician la consideración de las aplicaciones del método mecánico como una especie de experimentos mentales con objetos geométricos; este tono experimental habría despertado las iras de un espíritu platónico, pero no es incongruente con la clase de servicios que Arquímedes hubo de prestar en la corte del pragmático rey Hierón II y, desde luego, cuadra perfectamente con otros signos de la cultura científica helenística, e.g. con la experimentación que a veces practican y a veces sueñan los mecánicos. En segundo lugar, hay dos textos del corpus conocido de Arquímedes en los que éste aduce argumentos mecánicos: son *Sobre la cuadratura de la parábola* y el *Método*. Puede ser significativo que en ambos lugares obren las hipótesis H_1 mientras que las hipótesis H_2, activas en el *Método*, no están presentes en las prop. 14-16 de *Sobre la cuadratura...* dedicadas a la investigación mecánica del área del segmento parabólico. Sin embargo, tanto uno como otro contexto de argumentación mecánica se ve afectado por las limitaciones que Arquímedes achaca a su procedimiento: en ningún caso se demuestran los resultados así presentados (en el preámbulo de *Sobre la cuadratura...* Arquímedes advierte sobre este punto a su corresponsal, Dositeo, distinguiendo entre una consideración o un hallazgo mecánicos y la prueba geométrica de modo similar a como luego explicará a Eratóstenes en el preámbulo del *Método*). Según eso, el estigma mecánico del método y sus secuelas restrictivas se deben principalmente a las hipótesis estáticas H_1. Cabe añadir otro detalle en el mismo sentido: en la demostración geométrica de la prop. 23 de *Sobre la cuadratura*, Arquímedes parece discurrir en la línea de H_2 b/, al considerar bajo una forma finita un equivalente de la suma $1 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + ... = 4/3$ [45]. Por lo demás, en el marco de su circunspecto uso del método mecánico, Arquímedes nunca da a entender que la idea de que un plano (o un sólido) esté compuesto por líneas (o por planos) sea una idea abstrusa o incorrecta; antes bien, en un caso como la prop. 14 del *Método* la introduce mediante

[45] Vid. W. R. Knorr (1982): «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», l.c., pag. 125.

la partícula consecutiva *'oûn'* («así pues», «por lo tanto») que suele emplear en el contexto de una demostración —aunque la verdad es que esa introducción también puede asemejarse a otros usos impropios de signos demostrativos en el *Método*, como los señalados en la nota (41), vid. supra.

Llegados a este punto conviene hacer balance de las semejanzas y de las diferencias que median entre la demostración canónica, geométrica, y la argumentación mecánica.

Una demostración geométrica conlleva: (i) la base conceptual y teórica de la tradición geométrica, en especial la teoría de la proporción (incluida la condición arquimediana) y el principio de bisección que funda las aplicaciones del método de «exhausción»; (ii) el recurso a teoremas geométricos previamente establecidos; (iii) un rigor informal (euclídeo) en el curso de la deducción directa o de las pruebas indirectas por reducción al absurdo inherentes al método de «exhausción»; (iv) una plena cogencia demostrativa, el reconocimiento público del crédito [*pístis*] característico de esta forma canónica de prueba [46].

En cambio, una argumentación mecánica comporta: (*i'*) la introducción o la injerencia de nociones e hipótesis mecánicas; (*ii'*) el concurso de resultados de estática amén de teoremas geométricos; (*iii'*) un rigor deductivo informal parejo al de la deducción directa; (*iv'*) la mera plausibilidad o verosimilitud de la proposición considerada. Si un servicio de la demostración es añadir nuevos teoremas

[46] En el c. 4 del *Arenario*, Arquímedes señala que la *pístis* puede producirse a través de la demostración; pero, en el c. 1, ha dejado constancia de que los ojos, las manos y los instrumentos con los que se verifica la medida de un ángulo dado no resultan dignos de crédito *[axiópista]*. Esta credencial une a su progresiva conversión epistemológica otros desplazamientos. El primero es interno y casi natural: la demostración transfiere la *pístis* propia de los principios a las conclusiones, y los resultados así probados se pueden incorporar entonces al conocimiento establecido. El segundo es, digamos, de orden «externo»: el reconocimiento de la obviedad o de la calidad incontestable de los principios y las proposiciones probadas se espera en primera instancia de los entendidos; luego, al marcarse la impronta cultural de la geometría, dicho reconocimiento se extiende al común de las gentes. Proclo da fe de esta generalización comentando una «demostración práctica» atribuida al propio Arquímedes: tras haber logrado éste botar por sí solo, con la única ayuda de un engranaje de poleas, la pesada nave real, Hierón había declarado que a partir de aquel día se debería creer lo que Arquímedes dijera sobre cualquier asunto, era digno de crédito *[pisteutéos]*; Proclo comenta que los geómetras transforman las cosas *apistá*, increíbles, en *pistá*, cosas dignas de crédito para todos los hombres (*In I Eucl. Comm.*, 63.17-64.2).

al corpus establecido, los servicios de este otro método son de carácter indicativo y heurístico: es una manera imaginativa de abordar ciertos problemas, puede anticipar un resultado o la solución del problema planteado, puede facilitar indirectamente su demostración ulterior en la medida en que ésta procederá con mayor tino si ya se tiene una idea previa de la conclusión buscada.

A primera vista, la debilidad de la argumentación mecánica estriba en la deficiente o nula justificación teórica de las hipótesis mecánicas que dan al método, como ya he sugerido, un aire de experimentación mental. Pero, de ser estrictos en este punto, habríamos de reconocer que la demostración geométrica tampoco se funda siempre —ni siquiera en los *Elementos*— sobre una base axiomática precisa y suficiente. Claro que también cabe pensar que las pruebas geométricas se benefician de los supuestos tácitos y de las intuiciones subyacentes en la tradición de los usos y costumbres vigentes entre los geómetras, mientras que la teoría mecánica pertenece a una línea de trabajo relativamente menos acreditada y de escaso arraigo aún en el seno de la comunidad matemática. Su conceptualización descriptiva y métrica, al margen de las discusiones suscitadas por la confrontación filosófica en cuestiones tan generales como la constitución de la materia o la explicación de la causalidad física, es obra precisamente de Arquímedes [47].

Sin embargo, hay motivos más inmediatos en el medio académico alejandrino para poner en evidencia la fragilidad de las hipótesis mecánicas y, sobre todo, su impertinencia a la hora de vérselas con

[47] La filosofía natural griega ya se había familiarizado, antes de Arquímedes, con algunos fenómenos mecánicos, e.g. con la relación de equilibrio luego llamada «ley de la palanca». Los aristotélicos tendían a explicarlos desde supuestos dinámicos, como la fuerza de un cuerpo para mover una carga situada en el brazo opuesto de una balanza, y cinemáticos, en el marco de su teoría cosmológica de los movimientos naturales y forzados. Arquímedes adopta por su parte un perspectiva estática orientada por unos supuestos métricos que constituyen una forma de geometría aplicada: son magnitudes geométricas las que actúan perpendicularmente sobre una barra ingrávida; los pesos de los cuerpos y sus distancias respectivas al fulcro de la palanca son magnitudes aditivas, pertenecientes a un sistema de medición conjunta de relaciones conexas de orden o de equivalencia; el equilibrio de cualquier palanca de brazos iguales sometidos a pesos iguales, es asimismo un postulado de simetría geométrica. Por lo demás, Arquímedes puede mostrarse bastante flexible a la hora de manejar ciertos supuestos o modelos generales: e.g. en el libro I de *Sobre los cuerpos flotantes*, se sirve de un modelo dinámico afín a la cosmología aristotélica; en el libro II supone en cambio un modelo geométrico, más congruente con su propia línea de investigación hidrostática. Vid. mi introducción a *El método*, edic. c., pp. 16-17.

proposiciones geométricas. La precariedad de los argumentos mecánicos se debe antes que nada a la violación de dos normas metódicas de la prueba matemática: el traer a colación aquí unas nociones y unas hipótesis mecánicas atenta, en primer lugar, contra la autonomía y la congruencia de la propia geometría; en segundo lugar, trastrueca la prioridad que a ésta le corresponde en calidad de disciplina básica. La prueba concluyente de una propiedad o de una relación entre objetos geométricos no puede en justicia apelar a nociones extrínsecas como las de equilibrio o centro de gravedad, pues esta estrategia equivale a cuestionar la autosuficiencia teórica y la homogeneidad deductiva de los cuerpos de conocimiento que componen la geometría misma, y a descalificar los logros sistemáticos y disciplinarios de los *Elementos*. Por otro lado, si se repara en que las virtudes conceptuales y métricas de la estática dependen precisamente de su carácter mixto de aplicación o derivación geométrica, ese recurso se vuelve tanto más sospechoso pues subvierte la jerarquía «natural» que gobierna la relación entre ambas disciplinas, la geometría y la estática. Estas anomalías metodológicas —la transgresión de unas normas de la demostración científica avanzadas por los *Analíticos* de Aristóteles, avaladas implícitamente por los *Elementos* de Euclides y asumidas por la comunidad alejandrina—, son las que subrayan la fragilidad teórica de las hipótesis mecánicas y acentúan el tono informal de la deducción subsiguiente; constituyen, a mi juicio, el principal signo de debilidad de este tipo de argumentación frente al rigor y la solidez paradigmáticos de la prueba geométrica. La verdad es que no importan tanto por sí mismas como por lo que representan. No son infracciones meramente «formales», pues el contravenir esas convenciones metódicas —la prioridad, la suficiencia y la congruencia interna de la geometría— pone en peligro la inteligibilidad y la seguridad de la prueba (del modelo de prueba). El punto no es sólo de orden lógico —no se trata sencillamente del hecho familiar de que una conclusión verdadera también puede seguirse de conjeturas falsas o infundadas—, sino que afecta a la idea misma de *epistéme*, de ciencia demostrativa: un teorema de una ciencia de este tipo ha de fundarse directa o indirectamente en los principios incontestables y específicos de esta ciencia, tanto más si se trata de la ciencia demostrativa por excelencia —al menos a partir de Euclides—, a saber: la geometría.

A la luz de la lógica actual, la argumentación mecánica no reviste una informalidad deductiva sustancialmente mayor que la de otras

muchas pruebas aducidas en la *Optica* de Euclides o en los tratados sistemáticos del propio Arquímedes, e.g. *Sobre el equilibrio de los planos* I; ni para nosostros adolece de las incongruencias que podían sobresaltar a un matemático ortodoxo de la escuela alejandrina, quizás porque nos hemos habituado a ese modo de pensar a través de la física matemática clásica. Sea como fuere, todo parece indicar que los desarrollos geométricos y mecánicos son aspectos complementarios de la profunda motivación métrica que inspira la investigación de Arquímedes. En el uso de los métodos geométrico y mecánico podemos ver una trama compleja pero relativamente unitaria de discurso; ambos procedimientos se integran en una estrategia coherente de trabajo. Algunos comentadores actuales de la obra de Arquímedes han llamado la atención sobre esta integración. Hay quien, como G. Giorello (1976), asegura que la demostración geométrica no es un simple revestimiento «formal» o convencional, sino una profundización en los resultados previamente obtenidos por la vía mecánica. Hay quien, como W.R. Knorr (1978), desde una perspectiva opuesta del desarrollo de la obra de Arquímedes, llega a una apreciación análoga de las estrechas relaciones entre la geometría y la mecánica arquimedianas: Knorr sugiere que la aplicación de la técnica estándar de «exhausción» a problemas sobre centros de gravedad (e.g. a la determinación del centro de gravedad de un paralelogramo o de un triángulo en *Sobre el equilibrio...* I 9, 13) pudo haber inducido a Arquímedes a la subdivisión de las áreas en elementos rectilíneos paralelos que en último término se reducirían a líneas; de acuerdo con esta indicación, la hipótesis de la composición «infinitesimal» viene a ser una especie de simplificación de las técnicas habituales de «exhausción» [48]. En cualquier caso, la simbiosis relativa entre ambas líneas de investigación, la geométrica y la mecánica, es uno de los mejores motivos en favor de la inserción retrospectiva de Arquímedes en la tradición de la física matemática.

---

[48] Cf. G. Giorello (1976): «Archimede e la metodologia dei programmi di ricerca», art. c., y W. R. Knorr (1978): «Archimedes and the *Elements...*», art. c. Aunque Giorello no abunda en mayores precisiones, Sato (1986, 1987), art. c., proporciona algunos elementos de juicio en favor de este punto de vista. La interpretación de Knorr, precisa y documentada, comprende sin embargo una pretensión discutible: la de desmentir referencias expresas de Arquímedes a algunos casos en los que ha sido su investigación por la vía mecánica la que ha alumbrado resultados que *sólo más tarde* alcanzaría a demostrar por una prueba canónica geométrica; pero el punto no afecta demasiado al núcleo de la conjetura sobre la articulación entre la geometría y la investigación mecánica.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

A.

Thomas, I., ed. (1939): *Selections of Greek Mathematics.* London/Cambridge (Mass.), 1967³; 2 vols.

Euclidis opera omnia, J. L. Heiberg y H. Menge, eds. Leipzig, 1883-1916; *Elementa,* rev. E. Stamatis, Leipzig, 1969-1973, 4 vols. (1977, vol. V: Scholia)

Heath, T., ed. (1908, 1926): *The Thirteen Boks of Euclid's Elements.* New York, 1956.

Obras de Euclides. Elementos de Geometría. Libros I-II, edic. de J. D. García Bacca, México, 1944; III-V, edic. de J. Alvarez Laso, México, 1956.

Frajese, A. y Maccioni, L., eds.: *Eclide. Gli Elementi.* Torino, 1970.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, edic. de J. L. Heiberg. Leipzig, 1910-1915 ², 3 vols. (vid. la comunicación *A Eratóstenes sobre el método relativo a las proposiciones mecánicas* en el vol. II, pp. 426-507).

Archimède, edic. de Ch. Mugler. Paris, 1971; 3 vols. (vid. III, pp. 81-127)

Arquímedes: *El método.* Trad. de M.ª L. Puertas y L. Vega; introd. y notas de L. Vega. Madrid. 1986.

Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, edic. de G. Friedlein. Leipzig. 1883; 1967 reimp.

Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements. Edic. de G. R. Morrow. Princeton (N. J.), 1970.

B.

Boyer, C. B. (1968): *Historia de la matemática.* Madrid, 1986; cc. VII y VIII, pp. 141-188.
Giannantoni, G., Vegetti, M., eds.: *La scienza ellenistica.* Napoli, 1984.
Gillispie, Ch. C., dir.: *Dictionary of Scientific Biography.* New York, 1970-1980, 16 tomos; 1981, reimp. en 8 vols.
Gjersten, D.: *The Classics of Science.* New York, 1984; c. 3, pp. 38-70.
Heath, Th. (1921): *A History of Greek Mathematics.* New York, 1981; 2 vols.
Hintikka, J., Gruender, D., Agazzi, E., eds.: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology.* Dordrecht/Boston, 1980.
Neugebauer, O. (1957 [2]): *The Exact Sciences in Antiquity.* New York, 1969; c. VI, pp. 145-190.
Waerden, B. L. van der (1950, 1954): *Science Awakening.* New York, 1963.

C.

Becker, O.: *Das mathematische Denken der Antike.* Göttingen, 1957.
Becker, O. (1959): *Magnitudes y límites del pensamiento matemático.* Madrid, 1966; en especial, cc. 1 y 3, pp. 11-30 y 95-131 respectivamente.
Beckman, F.: «Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids», *Archive for History of Exact Sciences,* 4 (1967), pp. 1-144.
Berggren, J. L.: «History of Greek mathematics: a survey of recent research», *Historia Mathematica,* 11 (1984), pp. 394-410.
Berti, E.: «L'analisi geometrica della tradizione euclidea e l'analitica di Aristotele», en G. Giannantoni, M. Vegetti, eds. (1984), o.c., pp. 95-127.
Bulmer-Thomas, I.: «Euclid. Life and works», en Ch. G. Gillipie, dir. (1981), o.c., vol. 4, pp. 414-437.
Bulmer-Thomas, I.: «Theaetetus», en Ch. C. Gillipie, dir. (1981), o.c., vol. 8, pp. 301-307.
Burnyeat, M. F.: «The philosophical sense of Theaetetus mathematics», *Isis,* 69/249 (1978), pp. 489-513.
Cambiano, G.: «Il metodo ipotetico e la origini della sistemazione euclidea della geometria», *Rivista di Filosofia,* 58 (1967), pp. 115-149.
Cambiano, G.: «Archimede e la créscita della geometria», en G. Giannaantoni, M. Vegetti, eds. (1984), o.c., pp. 131-149.
Cambiano, G.: «La démonstration géometrique», en M. Detienne, dir.: *Les savoirs de l'écriture en Grèce ancienne.* Presses universitaires de Lille III, 1988; pp. 251-272.
Clagett, M.: «Archimedes», en Ch. C. Gillipie, dir. (1981), o.c., vol. 1, pp. 213-230.
Dijksterhuis, E. J. (1956): *Archimedes.* Princeton (N. J.), 1987.
Dijksterhuis, E. J. (1959): «The origins of classical mechanics from Aristotle

to Newton», en M. Clagett, ed.: *Critical Problems in the History of Science.* Madison (Milwauke), 1962, 1969 reimp.; pp. 163-184.

Dou, A.: «Euclides», en AA.VV. *Historia de la matemática hasta el s. XVII.* Madrid, 1986; pp. 61-78.

Fowler, D. H.: «Ratio in early Greek mathematics», *Bulletin of the American Mathematical Society* (N. S.), 1/6 (1979), pp. 807-846.

Fowler, D. F.: «Investigating Euclid's *Elements*» (recensión de I. Mueller (1981): *Philosophy of Mathem. and Deductive Structure in Euclid's Elements), The Bristish Journal for the Philosophy of Science,* 34/1 (1983), pp. 57-70.

Freguglia, P.: *Fondamenti storici della geometria.* Milano, 1982; cc. 1.°, pp. 21-27, en especial, y 2.° pp. 44-93.

Fritz, K. von: «Die ARXAI in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte,* 1 (1955), pp. 13-103.

García de la Sienra, A.: «El método de Arquímedes», *Dianoia. Anuario de Filosofía* (UNAM), 29 (1983), pp. 53-80.

Giannantoni, G.: «Su alcuni problemi circa i rapporti tra sicenza e filosofia nell'età ellenistica», en G. Giannantoni, M. Vegetti, eds. (1984), o.c., pp. 41-71.

Giorello, G.: «Archimede e la metodologia dei programmi di ricerca», *Scientia,* 69 (1976), pp. 111-123.

Granger, G.G: *Essai d'une philosphie du style.* Paris, 1968, 1988 [2].

Hintikka, J.: «Aristotelian axiomatics and geometrical axiomatics», en J. Hintikka, D. Gruender., E. Agazzi, eds. (1980), o.c., pp. 133-144.

Huxley, G. L.: «Eudoxus of Cnidus», en Ch. C. Gillipie, dir. (1981), o.c., vol. 4, pp. 465-467.

Itard, J.: *Les livres arithmétiques d'Euclide.* Paris, 1961.

Kidd, I. G.: «Posidonius and logic», en J. Brunschwig, ed.: *Les stoïciens et leur logique,* Paris, 1978; pp. 273-283.

Knorr, W. R.: *The Evolution of the Euclidean Elements.* Dordrecht/Boston, 1975.

Knorr, W. R.: «Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 28/103 (1978), pp. 183-244.

Knorr, W. R.: «Archimedes and the *Elements:* proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus», Archive for History of Exact Sciences, 19/3 (1978), pp. 211-290.

Knorr, W. R.: «On the early history of axiomatics;: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity», en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds. (1980), o.c., pp. 145-186.

Knorr, W. R.: «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», en N. Kretzmann, ed.: *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought.* Ithaca (N. J.), 1982; páginas 112-145.

Knorr, W. R.: «La croix des mathématiciens: the Euclidean theory of irra-

tional lines», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 9 (1983), pp. 41-69.

Knorr, W. R.: *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston, 1986.

Knorr, W. R.: «Archimedes after Dijksterhuis: a guide to recent studies», apéndice a E. J. Dijksterhuis (1987): *Archimedes,* o.c., pp. 419-451.

Lacombe, D.: «L'axiomatizasation des mathématiques au IIIe siècle avant J. C.», *Thalès,* 3 (1949-1950), pp. 37-58.

Lee, H. P.: «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», *Classical Quarterly,* 29 (1935), pp. 113-124.

Leszl, W.: «Mathematics, axiomatization and the hypotheses», en E. Berti, ed.: *Aristotle on Science. The Posterior Analytics.* Padova, 1981; pp. 271-328.

Malmendier, M.: «Eine axiomatik zum 7. Buch der *Elemente* von Euklid», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte,* 22 (1975), pp. 240-254.

Mueller, I.: «Euclid's *Elements* and the axiomatic method», *The British Journal for the Philosphy of Science,* 20/3 (1969), pp. 289-309.

Mueller, I.: «Greek mathematics and Greek logic», en J. Corcoran, ed.: *Ancient Logic and Its Modern Interpretations.* Dordrecht, 1974; pp. 35-70.

Mueller, I.: *Philosophy of Mathematics and Seductive Structure in Euclid's Elements.* Cambridge (Mass.)/London, 1981.

Mueller, I.: *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's and Speculation. Studies in Hellenistic Theory and Practice. Cambridge/Paris,* 1982; pp. 69-95.

Murdoch, J.: «Euclid. Transmission of the *Elements*», en Ch. C. Gillispie, dir. (1981), o.c., vol. 4, pp. 437-459.

Sato, T.: «A reconstruction of *The Method* proposition 17, and the developmen of Archimedes' thought on quadrature» Part I, *Historia Scientiarum,* 31 (1986), pp. 61-86; Part II, *Ibid.,* 32 (1987), pp. 75-142.

Schmidt, O.: «A system of axioms for the Archimedean theory of equilibrium and centre of gravity», *Centaurus,* 19 (1975), pp. 1-35.

Seidenberg, A.: «Did Euclid's Elements book I develop geometry axiomatically?», *Archive for History of Exact Sciences,* 14 (1974-1975), pp. 263-295.

Sorabji, R.: *Matter, Space & Motion. Theories in Antiquity and Their Sequel.* Ithaca/New York, 1988.

Suppes, P.: «Limitations of the axiomatic method in ancient Greek mathematical sciences», en J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, eds. (1980), o.c., pp. 197-213.

Szabó, A.: «The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitons and axioms», *Scripta Mathematica,* 17/1, 2 (1964), pp. 27-48, 113-139 respectivamente.

Szabó, A. (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics.* Dordrecht/Boston, 1978.

Tannery, P. (1887): *La géometrie grecque. 1.er Partie: Historie de la géométrie élémentaire.* Hildesheim/Zürich/New York, 1988.
Trudeau, R. J.: *The Non-Euclidean Revolution.* Boston/Basel/Stuttgar, 1987; c. 2 en particular, pp. 22-105.
Vlastos, G.: «Zeno of Sidon as a critic of Euclid», en L. Wallace, ed.: *The Classical Tradition.* Ithaca (N. J.), 1966; pp. 148-159.

MARCO CRONOLOGICO

	Filosofía (cosmología...), medicina	Matemáticas
S. VI a.n.e.	TALES, ANAXIMANDRO (hacia 610-540)	
	ANAXIMENES (floruit circa 546)	
	PITAGORAS (2.ª mitad del siglo)	Pitagóricos$_1$ («1.ª generación»)
	HERACLITO (fl. c. 500)	
	PARMENIDES (fl. c. 500)	
S. V	ALCMEON (1.er tercio)	Pitagóricos$_2$ (HIPASO)
	ZENON (fl. c. 468-4500), MELISSO	Pitagóricos$_3$
	ANAXAGORAS (h. 500-428)	HIPOCRATES DE KHIOS (h. 470-400)
	FILOLAO	Pitagóricos$_4$
«Ilustración ática» (hacia 440-429)	LEUCIPO, DEMOCRITO (fl. mediados de siglo)	
	PROTAGORAS (h. 490-410), GORGIAS	TEODORO (fl. c. 410)
	SOCRATES (469-399)	Pitagóricos$_5$ (ARQUITAS)
	Corpus Hipocrático básico (h. 420-350)	

	Filosofía (cosmología...), medicina	Matemáticas
S. IV *Academia* ¿385? *Liceo* ¿335?	Socráticos menores; dialécticos PLATON (427-367) ARISTOTELES (384-322) TEOFRASTO (370-288/5)	TEETETO (415/4-369) EUDOXO (fl. c. 368-5) MENAEKHMO (fl. c. 350)
S. III *Jardín* ¿306? *Stoa* ¿300? *Museo* ¿290?	EPICURO (341-270) ZENON DE CITIO (335-263) CRISIPO (280-207/5) Escépticos académicos: ARCESILAO (escolarca 268)	EUCLIDES (fl. c. 300) CONON. Matemáticos alejandrinos (e.g. DOSITEO) ARQUIMEDES (287-212) ERATOSTENES (275-194) APOLONIO (fl. c. 220)
S. II	CARNEADES (escolarca 162)	
S. I	AENESIDEMO (2.ª mitad) Pirronismo [aunque PIRRON: h. 365-270]	DIOCLES (principios) GEMINO (mediados del siglo)
S. I d.n.e.	Medicina (tradiciones «dogmática» y «empirista», tendencia «metódica»)	HERON DE ALEJ. (fl. c. 62)
S. II «Manuales de Dialéctica»	APULEYO (h. 125-¿?) GALENO (129/30-199/200) SEXTO EMPIRICO (finales)	TOLOMEO (fl. c. 147-8)

	Filosofía (cosmología...), medicina	Matemáticas
S. III «Comentadores»	DIOGENES LAERCIO (¿principios?) ALEJANDRO DE AFRODISIA (principios) NEOPLATONISMO. [PLOTINO (204/5-269/70)]	DIOFANTO (fl. c. 250)
	PORFIRIO (232/3-¿305?) IAMBLICO (h. 250-325)	PAPPO (fin. III-princ. IV)
S. IV		TEON DE ALEJ. (fl. c. 364)
S. V	PROCLO (411/2-485) BOECIO (480-524)	
S. VI	FILOPON (h. 490-570) SIMPLICIO	EUTOCIO (1.ª mitad)